

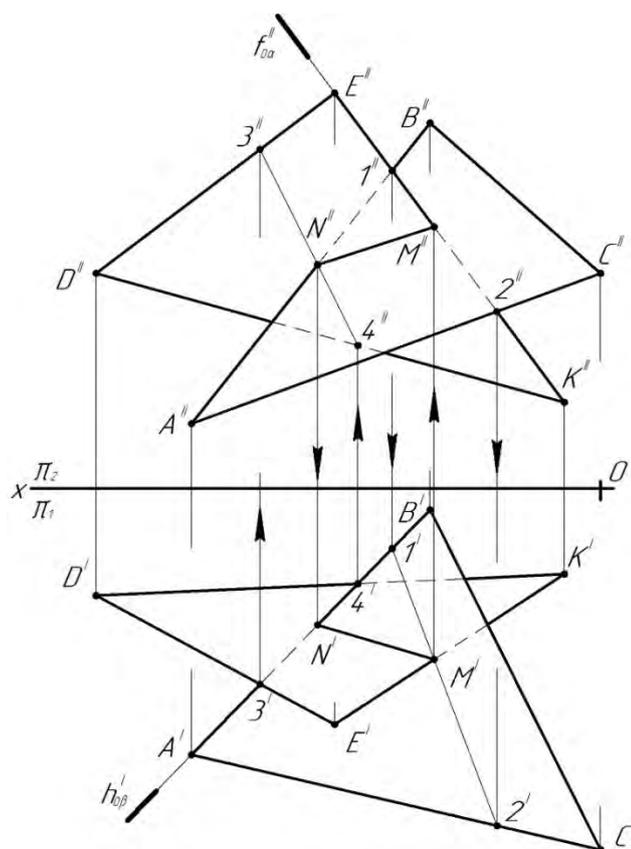
Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Вологодская государственная
молочнохозяйственная академия имени Н.В. Верещагина»

Инженерный факультет

Кафедра энергетических средств и технического сервиса

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие



Вологда – Молочное
2022

УДК 514.18 (075.8)

ББК 22.151.3 р30

Н 365

Разработал:

старший преподаватель
кафедры энергетических средств и технического сервиса
С.В. Гайдидей

Рецензенты:

канд. техн. наук, доцент кафедры энергетических средств
и технического сервиса
А.Л. Бирюков,
канд. техн. наук, доцент кафедры технические системы в агробизнесе
Н.Н. Кузнецов

Н 365 Начертательная геометрия: Учебно-методическое пособие /
Разраб. С.В. Гайдидей. – Вологда – Молочное: ФГБОУ ВО
Вологодская ГМХА, 2022. – 55 с.

Учебно-методическое пособие по начертательной геометрии предназначено
для студентов первого курса инженерного и технологического факультетов,
обучающихся по направлениям:

35.03.06 «Агроинженерия»,

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»,

27.03.01 «Стандартизация и метрология»,

19.03.03 «Продукты питания животного происхождения».

В пособии приведены варианты задач для индивидуального решения и
примеры их выполнения в соответствии с рабочей программой по дисциплине.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Вологодской
государственной молочнохозяйственной академии имени Н.В. Верещагина.

УДК 514. 18 (075.8)

ББК 22.151.3 р30

© Гайдидей С.В., 2022

© ФГБОУ ВО Вологодская ГМХА, 2022

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является теоретической основой построения технических чертежей, которые представляют собой полные графические модели конкретных инженерных изделий. Задача изучения начертательной геометрии сводится к развитию пространственного представления и воображения, конструктивно-геометрического мышления, выработки способностей к анализу и синтезу пространственных форм и их отношений. Студент должен изучить способы конструирования различных геометрических пространственных объектов (в основе – поверхностей), способы получения их чертежей на уровне графических моделей и умению решать на этих чертежах задачи, связанные с пространственными объектами и их зависимостями.

За последние годы круг задач, решаемых методами начертательной геометрии, значительно расширился. Ее методы нашли широкое применение в системах автоматизированного проектирования (САПР).

Начертательная геометрия обеспечивает студента минимумом фундаментальных инженерно-геометрических знаний, на базе которых будущий дипломированный специалист сможет успешно изучать инженерную графику, теоретическую механику, сопротивление материалов, теорию машин и механизмов, детали машин и другие конструкторско-технологические и специальные дисциплины, а также овладевать новыми знаниями в области компьютерной графики, геометрического моделирования и др.

На всех видах занятий следует рассматривать принципиальные вопросы, формулировать и доказывать основополагающие предложения, рассматривать типовые задачи, давать алгоритмы их решения. Особое внимание следует обращать на четкость формулировки понятий и их определений. Рассмотрение частных случаев, вариантов построения, детализации тех или иных вопросов должны быть отнесены к практическим занятиям и домашним заданиям.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса инженерного и технологического факультетов, обучающихся по направлениям:

35.03.06 «Агроинженерия»,

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»,

27.03.01 «Стандартизация и метрология»,

19.03.03 «Продукты питания животного происхождения».

Пособие позволяет самостоятельно успешно решать основные позиционные и метрические задачи начертательной геометрии. Предлагаемый для каждой задачи перечень контрольных вопросов дает возможность подготовиться к текущей и промежуточной аттестации.

СИМВОЛИКА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Символика начертательной геометрии используется для обозначения геометрических фигур и их проекций, для отображения отношения между ними, а также для краткости записи решения задач. В данном пособии примеры задач сопровождаются записью решения в символическом виде.

Рассмотрим основные символы начертательной геометрии.

A, B, C, \dots	} – точки	a, b, c, \dots	– прямые
$1, 2, 3, \dots$			
(AB)	– прямая, проходящая через точки A и B		
$[AB]$	– отрезок прямой, заключенный между точками A и B		
$ AB $	– натуральная величина отрезка $[AB]$		
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	– плоскости	$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$	– плоскости проекций
$пл.(\triangle ABC)$ – плоскость, заданная треугольником ABC			
x – ось проекций			
\in	– принадлежит, является элементом (например: $A \in b$ – точка A принадлежит прямой b ; $C \in \alpha$ – точка C принадлежит плоскости α ; $l \in D$ – прямая l проходит через точку D)		
\subset	– принадлежит, является множеством (например: $a \subset \alpha$ – прямая a принадлежит плоскости α , т.е. множество точек прямой a является подмножеством точек плоскости α); $b \supset C, D$ – прямая b проходит через точки C и D		
\wedge	– и	\vee	– или
\equiv	– совпадают	\cong	– конгруэнтны
\parallel	– параллельны	\perp	– перпендикулярны
\sphericalangle	– скрещиваются	\cap	– пересекаются
\Rightarrow	– следовательно	\rightarrow	– переход

Также в учебно-методическом пособии встречаются и другие обозначения, смысл которых понятен из текста.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ЧЕРТЕЖЕЙ

Курс «Начертательная геометрия» предполагает индивидуальное выполнение студентом шести задач. Каждая задача выполняется на листе чертежной бумаги формата А3 (297×420 мм), имеющем рамку и основную надпись. Линии рамки проводят сплошной толстой линией на расстоянии 5 мм от верхней, правой и нижней сторон листа и 20 мм от левой стороны листа. Основную надпись располагают в правом нижнем углу рамки и заполняют по предлагаемой форме. Пример заполнения основной надписи представлен на рисунке 1.

35	Вариант 12				Масштаб 1:1
	Чертил Лебедев		14.10.13	Задача №1	ИНЖ-311-0
10	Принял Иванов		14.10.23		
10	20	25	20	15	40
	185				

Рисунок 1 – Пример заполнения основной надписи

Исходные данные выполнить в масштабе 1:1.

Чертеж необходимо выполнять сначала тонкими линиями. Все точки на чертеже должны быть обозначены. Вспомогательные точки, получаемые при построении, рекомендуется обозначать по порядку арабскими цифрами – 1, 2, 3, В дальнейшем будет проще восстановить порядок построений при подготовке к защите и при защите работ.

После консультации с преподавателем чертеж обводится, при этом для различных элементов чертежа применяются типы линий по ГОСТ 2.303-68 [1] (рисунок 2). Вспомогательные линии построения необходимо сохранить, линии связи можно разрывать (как в разобранных примерах выполнения). Рекомендуется нанести на чертеже стрелки переходов от одной проекции точки к другой, стрелки направления взгляда при определении видимости, а также знаки перпендикулярности прямых. В дальнейшем это также облегчит защиту чертежа.

Для нанесения надписей и размеров использовать чертежный шрифт 5 по ГОСТ 2.304-81 [1].

Каждая задача должна быть защищена, контрольные вопросы к защите даны после примера выполнения каждой задачи.

- сплошная толстая основная (видимые линии геометрических фигур, линии рамки, основной надписи; толщина $s=0,5...1,4$ мм)
- сплошная тонкая (вспомогательные линии построения, линии связи; толщина $s/3...s/2$)
- штриховая (невидимые линии геометрических фигур; толщина $s/3...s/2$)
- · — · — · — штрихпунктирная тонкая (осевые линии; толщина $s/3...s/2$)
- · — · — · — штрихпунктирная с двумя точками (линии сгиба; толщина $s/3...s/2$)

Рисунок 2 – Основные типы линий

ЗАДАЧА №1

Задача №1 – на построение линии пересечения плоскостей общего положения.

Задание. Построить линию пересечения треугольников ABC и EDK ; показать их видимость в проекциях. Линию пересечения определить двумя способами:

- 1) способом перемены плоскостей проекций;
- 2) способом посредников.

Данные к задаче №1 приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Данные к задаче №1 (координаты даны в мм)

Координаты	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_A	95	0	43	100	0	42	100	0	95	15	112	108	15	15	98
y_A	75	70	20	75	40	65	8	38	8	8	41	42	33	63	62
z_A	7	42	65	8	70	20	75	65	75	75	70	65	62	33	33
x_B	45	100	0	42	98	0	40	95	42	70	16	65	70	69	43
y_B	20	75	65	16	8	42	68	6	66	65	10	65	98	5	5
z_B	65	8	38	62	75	70	15	73	20	20	76	15	5	90	89
x_C	0	42	95	0	43	96	0	42	0	112	70	12	110	112	0
y_C	70	20	75	65	65	5	43	65	42	40	74	8	40	31	32
z_C	40	66	8	38	20	70	70	20	70	68	20	70	31	39	40
x_D	55	13	108	58	11	112	54	58	12	55	100	0	55	56	110
y_D	92	42	15	95	0	15	65	70	0	70	0	30	16	0	0
z_D	70	0	30	70	43	15	92	90	42	90	43	16	0	15	16
x_E	112	58	10	112	56	12	108	12	112	0	0	100	0	0	71
y_E	15	92	42	16	70	0	32	0	30	30	29	0	90	40	40
z_E	30	70	0	26	92	42	15	43	16	15	16	40	40	92	90
x_K	12	112	55	8	112	58	12	112	58	100	58	58	100	100	12
y_K	45	15	88	42	30	70	0	30	70	0	70	65	65	72	55
z_K	0	30	65	0	16	92	43	16	92	43	91	90	71	65	65

Определение линии пересечения треугольников способом перемены плоскостей. Суть способа перемены плоскостей проекций заключается в том, что одну из плоскостей общего положения преобразовывают в проецирующую.

1) Плоскости треугольников ABC и EDK (рисунок 3) – это плоскости общего положения (они не параллельны и не перпендикулярны

ни одной из плоскостей проекций). Преобразуем одну из плоскостей – плоскость ΔABC – во фронтально-проецирующую плоскость (т.е. в перпендикулярную новой фронтальной плоскости проекций π_4):

$$пл.(\Delta ABC) - ПлОП \rightarrow пл.(\Delta ABC) \perp \pi_4$$

Для этого проведем в плоскости ΔABC через точку C горизонталь h (прямую, параллельную π_1). Ее фронтальная проекция h'' параллельна оси x , будет проходить через точку C'' , и пересекаться с $(A''B'')$ в точке $1''$. Строим горизонтальную проекцию точки 1 – точку $1'$, – принадлежащую, соответственно, $(A'B')$, и проводим горизонтальную проекцию горизонтали (h') через $1'$ и C' :

$$h \square \pi_1 \wedge h \ni C \wedge h \subset пл.(\Delta ABC)$$

$$h \square \pi_1 \Rightarrow h'' \square x$$

$$h \ni C \Rightarrow h'' \ni C''$$

$$h \subset пл.(\Delta ABC) \Rightarrow h'' \cap (A''B'') = 1''$$

$$1'' \rightarrow 1'$$

$$h' \supset 1', C'$$

Вводим новую фронтальную плоскость проекций π_4 , перпендикулярную горизонтали h , а, следовательно, и плоскости ΔABC . Для этого ось x_1 проведем перпендикулярно h' :

$$x \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\pi_4}{\pi_1}$$

$$\pi_4 \perp h \Rightarrow x_1 \perp h'$$

Строим новые фронтальные проекции треугольников. Для этого проводим из горизонтальных проекций точек линии связи, перпендикулярные оси x_1 , и откладываем аппликаты соответствующих точек (т.е. расстояния от фронтальных проекций точек до оси x) от оси x_1 по линиям связи:

$$|A'', x| = |x_1, A^{IV}|, |B'', x| = |x_1, B^{IV}|, \text{ и т.д.}$$

Если все построения сделаны правильно и точно, то новая фронтальная проекция ΔABC будет являться прямой линией:

$$\Delta A^{IV} B^{IV} C^{IV} - \text{прямая линия.}$$

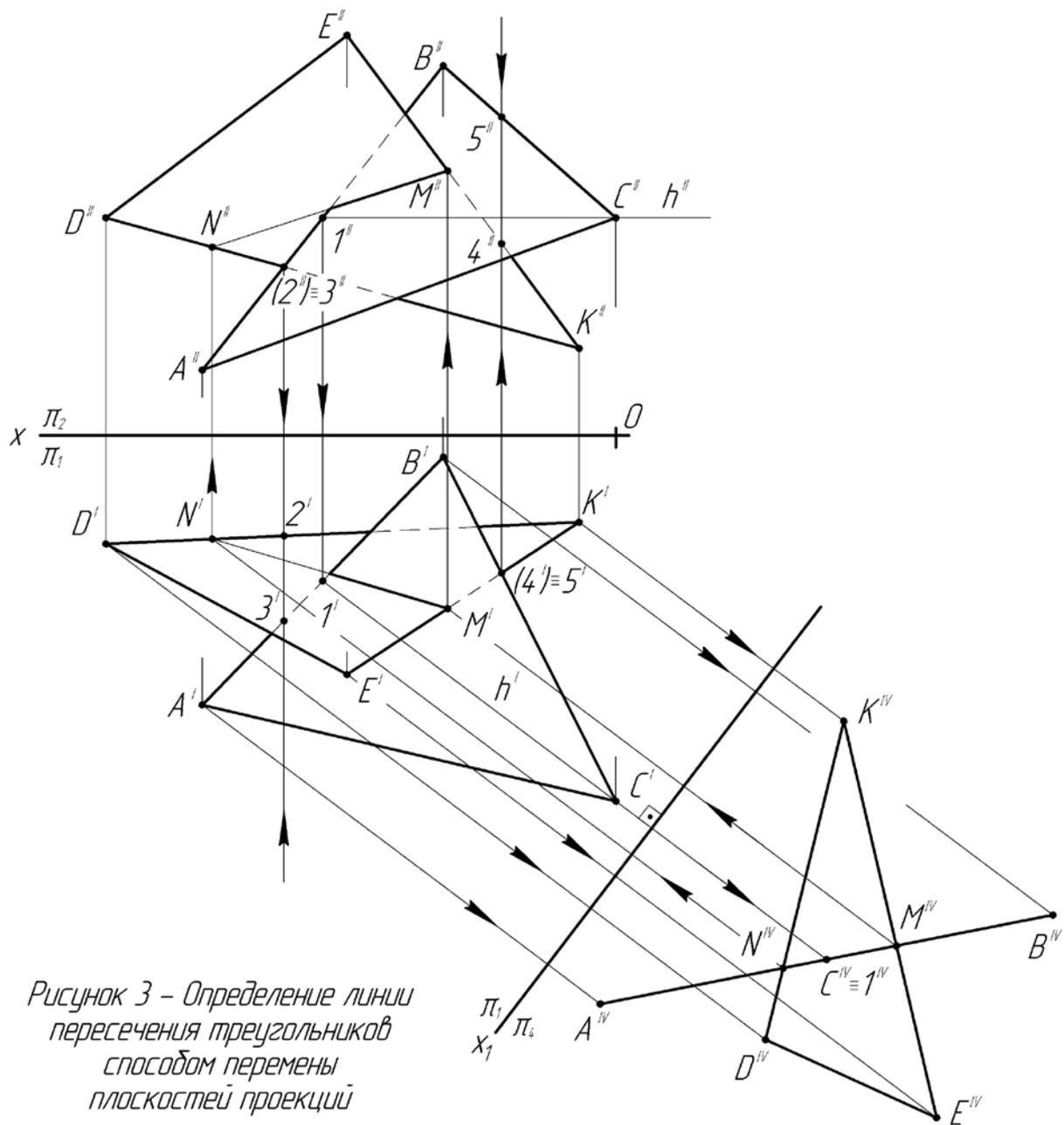


Рисунок 3 – Определение линии пересечения треугольников способом перемены плоскостей проекций

2) Так как в новой системе плоскостей проекций $X_1 \frac{\pi_4}{\pi_1}$ плоскость ΔABC будет являться фронтально проецирующей, то проекция линии пересечения треугольников на π_4 будет обязательно принадлежать $\Delta A^{IV} B^{IV} C^{IV}$. Таким образом, на пересечении $\Delta A^{IV} B^{IV} C^{IV}$ и $\Delta E^{IV} D^{IV} K^{IV}$ найдем $(M^{IV} N^{IV})$:

$$пл.(\Delta ABC) \perp \pi_4 \Rightarrow \Delta A^{IV} B^{IV} C^{IV} \cap \Delta E^{IV} D^{IV} K^{IV} = (M^{IV} N^{IV})$$

Строим горизонтальные и фронтальные проекции точек M и N . Для этого проводим из точки M^{IV} линию связи перпендикулярно оси X_1 до

пересечения с $(E'K')$, т.к. точка M принадлежит стороне (EK) треугольника EDK . На пересечении получаем горизонтальную проекцию точки $M - M'$. Затем восстанавливаем линию связи из точки M' перпендикулярно оси x до пересечения с $(E''K'')$ и получаем фронтальную проекцию точки $M - M''$. Учитывая, что точка N принадлежит стороне (DK) , аналогично находим ее горизонтальную и фронтальную проекции:

$$M \in (EK) \Rightarrow M^V \rightarrow M' \in (E'K') \rightarrow M'' \in (E''K'')$$

$$N \in (DK) \Rightarrow N^V \rightarrow N' \in (D'K') \rightarrow N'' \in (D''K'')$$

3) Определяем видимость проекций треугольников методом конкурирующих точек.

Чтобы определить видимость на фронтальной проекции, рассмотрим точку пересечения $(D''K'')$ и $(A''B'')$. Она представляет собой проекции двух точек, из которых одна (точка 2) принадлежит стороне (DK) , а другая (точка 3) – стороне (AB) . Проводим линию связи этих точек и находим их горизонтальные проекции – точки $2'$ и $3'$:

$$(D''K'') \cap (A''B'') = 2'', 3''$$

$$2 \in (DK), 3 \in (AB)$$

$$2'' \rightarrow 2' \in (D'K'), 3'' \rightarrow 3' \in (A'B')$$

Таким образом, ордината точки 3 (расстояние $|3', x|$) больше, чем ордината точки 2 (расстояние $|2', x|$), и точка 3 находится ближе к зрителю (зритель находится в первой четверти, направление взгляда зрителя показано стрелкой). Соответственно, фронтальная проекция точки 3 (точка $3''$) будет видима, а фронтальная проекция точки 2 (точка $2''$) – невидима:

$$y_3 > y_2 \Rightarrow (2''), 3''$$

Так как точка 3 принадлежит (AB) , то видимость фронтальной проекции стороны (AB) будет совпадать с видимостью фронтальной проекции точки 3: $(A''B'')$ до линии пересечения видима, после – невидима. Рассуждая аналогичным образом, определяем видимость на фронтальной проекции треугольников. Видимые линии обводим сплошной толстой основной линией, а невидимые – штриховой линией.

Аналогично определяем видимость на горизонтальной проекции треугольников. Для этого рассматриваем точку пересечения $(E'K')$ и

$(B'C')$, которая представляет собой проекции двух точек – точки 4, принадлежащей (EK) , и точки 5, принадлежащей (BC) . Так как аппликата точки 5 больше аппликаты точки 4, то точка 5 будет выше точки 4 относительно плоскости проекций π_1 . Поэтому на горизонтальной проекции будет видима точка 5, а, следовательно, и сторона (BC) .

Определение линии пересечения треугольников способом посредников. Суть способа заключается в том, что вводятся вспомогательные проецирующие плоскости-посредники. Причем зачастую выгодно, чтобы эти вспомогательные плоскости заключали в себе элементы заданных плоскостей – прямые, стороны треугольников, и т.д.

1) Проведем вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость α через сторону (EK) треугольника EDK (рисунок 4). Для этого фронтальный след $f''_{0\alpha}$ плоскости проводим через $(E''K'')$:

$$[\alpha \perp \pi_2 \wedge \alpha \supset (EK)] \Rightarrow f''_{0\alpha} \supset (E''K'')$$

2) Находим линии пересечения вспомогательной плоскости α с плоскостями треугольников ABC и EDK . Так как плоскость α проходит через сторону (EK) треугольника EDK , то (EK) будет являться линией пересечения плоскостей α и ΔEDK . Чтобы построить линию $(1-2)$ пересечения плоскостей α и ΔABC , находим точки пересечения $(1''$ и $2''$) фронтального следа плоскости α с фронтальной проекцией ΔABC $(\Delta A''B''C'')$. Учитывая, что точка 1 принадлежит стороне (AB) треугольника ABC , а точка 2 – стороне (AC) , находим горизонтальные проекции точек $(1'$ и $2')$. Для этого опускаем линии связи из точек $1''$ и $2''$ до пересечения с $(A'B')$ и $(A'C')$ соответственно:

$$\alpha \cap \text{пл.}(\Delta EDK) = (EK)$$

$$\alpha \cap \text{пл.}(\Delta ABC) = (1-2)$$

$$f''_{0\alpha} \cap (A''B'') = 1'', f''_{0\alpha} \cap (A''C'') = 2''$$

$$1'' \rightarrow 1' \in (A'B'), 2'' \rightarrow 2' \in (A'C')$$

3) Находим точку M пересечения линий пересечения (EK) и $(1-2)$. Горизонтальная проекция точки M (M') будет являться результатом пересечения $(E'K')$ и $(1'-2')$, а фронтальную проекцию точки (M'') получим, подняв линию связи из точки M' до пересечения с $f''_{0\alpha}$:

$$(EK) \cap (1-2) = M$$

$$(E'K') \cap (1' - 2') = M', M' \rightarrow M'' \in f''_{0\alpha}$$

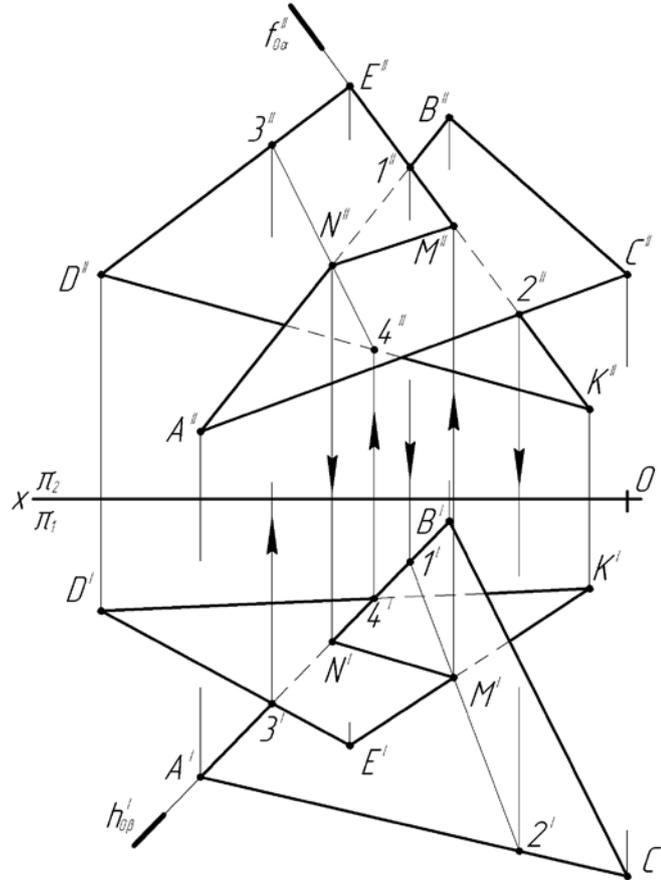


Рисунок 4 – Определение линии пересечения треугольников способом посредников

4) Аналогично вводим еще одну вспомогательную плоскость – горизонтально-проецирующую плоскость β через сторону (AB) треугольника ABC . Для этого горизонтальный след $h'_{0\beta}$ плоскости проводим через проекцию $(A'B')$:

$$[\beta \perp \pi_1 \wedge \beta \supset (AB)] \Rightarrow h'_{0\beta} \supset (A'B')$$

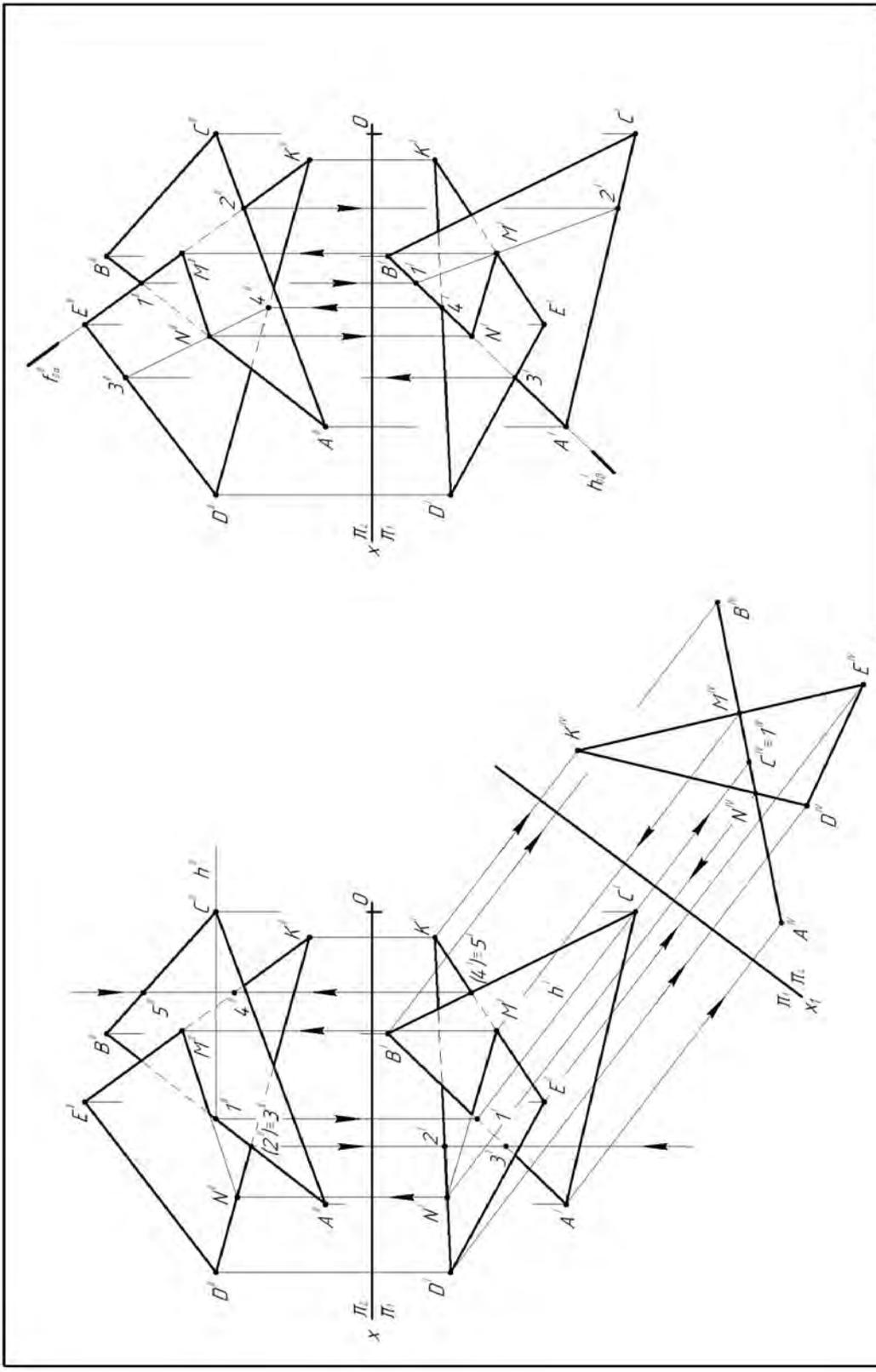
5) Находим линии пересечения вспомогательной плоскости β с плоскостями треугольников ABC и EDK . Линией пересечения плоскостей β и ΔABC будет (AB) , а плоскостей β и ΔEDK – линия $(3-4)$:

$$\beta \cap \text{пл.}(\Delta ABC) = (AB)$$

$$\beta \cap \text{пл.}(\Delta EDK) = (3-4)$$

$$h'_{0\beta} \cap (D'E') = 3', h'_{0\beta} \cap (D'K') = 4'$$

$$3' \rightarrow 3'' \in (D''E''), 4' \rightarrow 4'' \in (D''K'')$$



Чертил / Лебедев		Вариант 12		Масштаб 1:1	
Принял / Иванюк		Задача №1		ИНЖ-311-0	
		14.10.23			
		14.10.23			

Рисунок 5 – Пример выполнения задачи №1

6) Находим точку N пересечения линий (AB) и $(3-4)$:

$$(AB) \cap (3-4) = N$$

$$(A''B'') \cap (3''-4'') = N''$$

$$N'' \rightarrow N' \in h'_{\alpha\beta}$$

7) Определяем видимость проекций треугольников (аналогично, как и предыдущим способом). На рисунке 4 вспомогательные построения для определения видимости не показаны.

Пример выполнения задачи №1 приведен на рисунке 5.

Контрольные вопросы к задаче №1

1. Способы задания плоскости на чертеже. Какие плоскости есть на Вашем чертеже, и чем они заданы?

2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Какие плоскости называются проецирующими, плоскостями уровня, плоскостями общего положения? Как располагаются различные плоскости на Вашем чертеже?

3. Какие линии называются главными линиями плоскости? Как они располагаются по отношению к плоскостям проекций? Присутствуют ли такие линии на Вашем чертеже?

4. В чем суть способа перемены плоскостей проекций при определении линии пересечения плоскостей общего положения? Объяснить непосредственно на чертеже.

5. Алгоритм определения способом посредников линии пересечения плоскостей общего положения. Объяснить непосредственно на чертеже.

6. В чем суть метода конкурирующих точек? Как определяется видимость на чертеже с помощью этого метода?

ЗАДАЧА №2

В задаче №2 решаются следующие вопросы:

- 1) построение линии пересечения пирамиды плоскостью;
- 2) определение натуральной величины плоской фигуры (в данном случае сечения);
- 3) определение натуральной величины отрезка (ребер пирамиды);
- 4) построение развертки пирамиды.

Задание. Пирамида $SABC$ пересекается плоскостью α (рисунок 6). Построить развертку усеченной части пирамиды.
Данные к задаче №2 приведены в таблице 2.

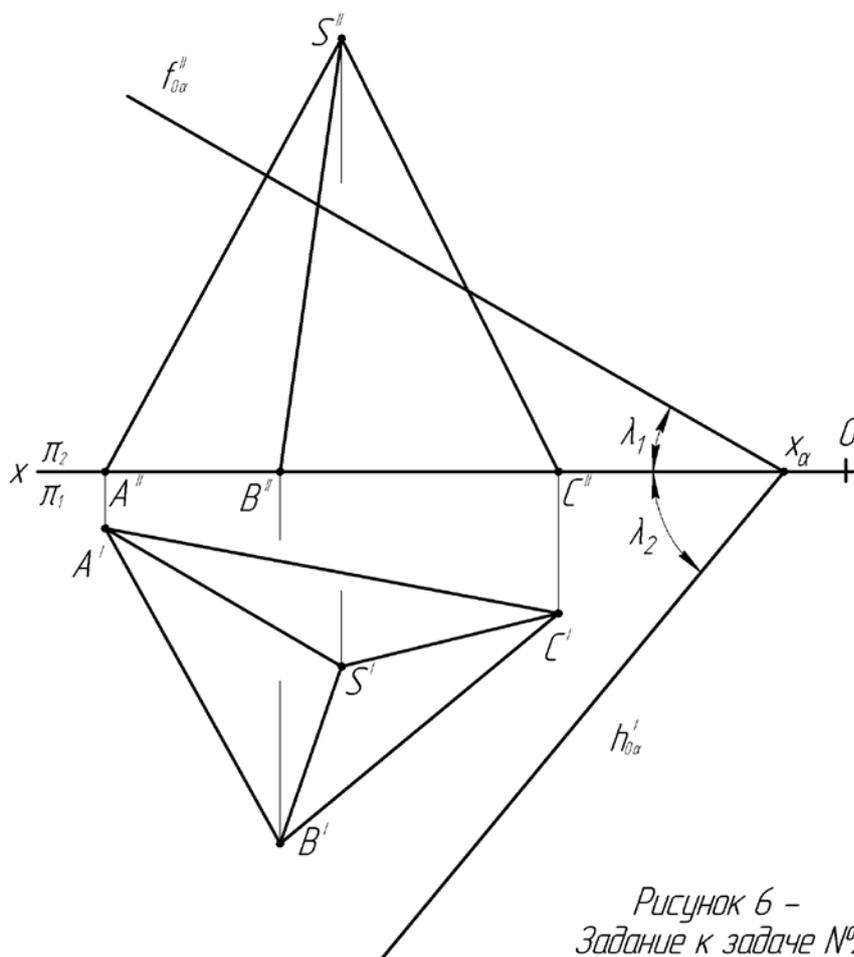


Рисунок 6 –
Задание к задаче №2

Построение развертки усеченной части пирамиды. Для построения развертки пирамиды необходимо иметь:

- 1) натуральную величину сечения;
- 2) натуральную величину основания;
- 3) натуральную величину каждого ребра.

Таблица 2 – Данные к задаче №2

Параметры	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Координаты, мм															
x_A	120	110	60	40	100	90	60	50	115	105	50	60	30	75	70
y_A	20	30	65	60	0	0	0	0	25	30	60	60	0	0	0
z_A	0	0	0	0	40	30	15	12	0	0	0	0	35	15	40
x_B	95	80	115	10	40	40	90	90	90	80	110	15	70	90	15
y_B	65	70	10	10	0	0	0	0	68	70	20	20	0	0	0
z_B	0	0	0	0	10	70	50	45	0	0	0	0	60	70	65
x_C	60	35	40	80	70	20	20	35	65	45	30	80	85	30	30
y_C	12	10	20	25	0	0	0	0	10	15	15	20	0	0	0
z_C	0	0	0	0	60	20	45	60	0	0	0	0	15	55	10
x_S	40	70	100	110	85	60	50	62	40	60	90	100	65	60	40
y_S	40	40	35	40	70	75	70	80	35	40	35	40	68	78	68
z_S	70	80	70	75	40	40	35	35	68	80	65	80	40	45	30
x_α	0	0	140	140	20	0	110	120	10	0	135	140	0	0	100
Углы, град.															
λ_1	30	30	150	150	45	90	135	90	30	30	150	150	60	90	120
λ_2	45	90	135	90	30	30	150	150	45	90	135	90	30	30	150
<p><i>Примечание.</i> Углы λ_1 и λ_2 – это углы между положительным направлением оси x и следами $f''_{0\alpha}$ и $h'_{0\alpha}$ соответственно. Если значение углов больше 90°, то эти углы – тупые.</p>															

Случай 1: α – плоскость общего положения.

1. Построение сечения и определение его натуральной величины (рисунок 7).

Плоскость α – плоскость общего положения. Преобразуем ее во фронтально-проецирующую плоскость, для этого введем новую фронтальную плоскость проекций π_4 , перпендикулярную α . В этом случае ось x_1 новой системы плоскостей проекций будет перпендикулярна горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости α :

$$\alpha - \text{ПЛОП} \rightarrow \alpha \perp \pi_4$$

$$x \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\pi_4}{\pi_1}, x_1 \perp h'_{0\alpha}$$

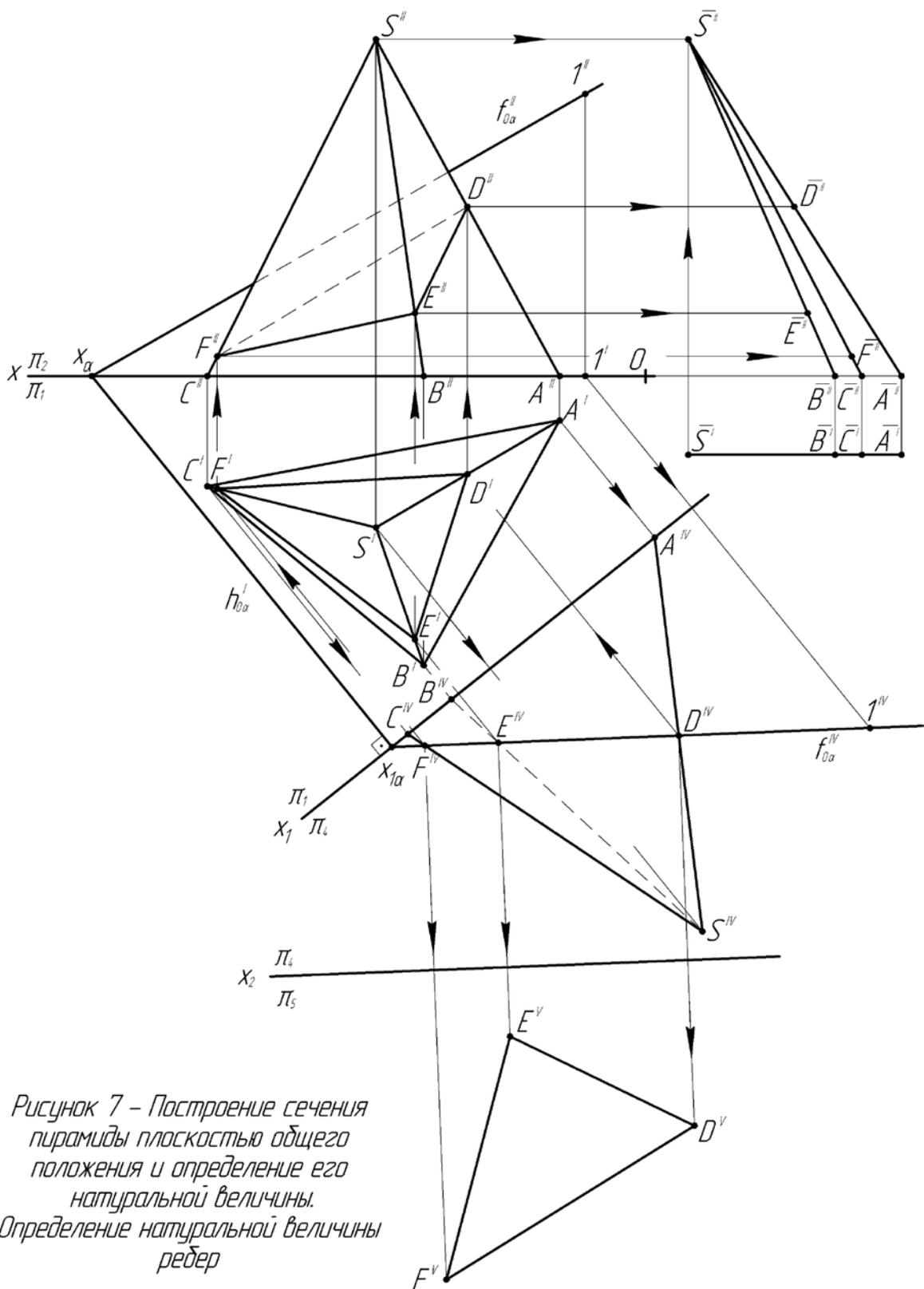


Рисунок 7 – Построение сечения пирамиды плоскостью общего положения и определение его натуральной величины. Определение натуральной величины ребер

Строим проекцию пирамиды $SABC$ на плоскость проекций π_4 . Для этого из горизонтальных проекций точек проводим перпендикулярно оси X_1 линии связи. Замеряем аппликату точки S и откладываем от оси X_1 по линии связи. Аппликаты точек A , B и C равны нулю (т.к. основание

принадлежит горизонтальной плоскости проекций), поэтому проекции точек на плоскость проекций π_4 будут находиться на оси X_1 :

$$S''A''B''C'' \rightarrow S^{IV}A^{IV}B^{IV}C^{IV}$$

Для того чтобы построить след плоскости α на плоскости проекций π_4 ($f_{0\alpha}^{IV}$), на фронтальном следе $f_{0\alpha}''$ берем точку 1 , проецируем ее на плоскость проекций π_4 и соединяем точки $X_{1\alpha}$ и 1^{IV} :

$$f_{0\alpha}'' \rightarrow f_{0\alpha}^{IV}$$

$$1'' \in f_{0\alpha}'' \rightarrow 1' \in X \rightarrow 1^{IV}$$

$$f_{0\alpha}^{IV} \supset 1^{IV}, X_{1\alpha}$$

Так как в системе плоскостей проекций $X_1 \frac{\pi_4}{\pi_1}$ плоскость α будет

проецирующей, то все точки, принадлежащие плоскости (в том числе и точки сечения) будут проецироваться на плоскость проекций π_4 на новый фронтальный след плоскости ($f_{0\alpha}^{IV}$). Поэтому проекция сечения на π_4 ($D^{IV}E^{IV}F^{IV}$) будет находиться на пересечении $f_{0\alpha}^{IV}$ с проекцией пирамиды ($S^{IV}A^{IV}B^{IV}C^{IV}$):

$$[\alpha \cap \text{пир.}(SABC) \wedge \alpha \perp \pi_4] \Rightarrow f_{0\alpha}^{IV} \cap (S^{IV}A^{IV}B^{IV}C^{IV}) = (D^{IV}E^{IV}F^{IV})$$

Далее находим горизонтальную проекцию сечения ($D'E'F'$), проводя линии связи точек до пересечения с горизонтальными проекциями соответствующих ребер (точка D принадлежит ребру SA , E – ребру SB , F – ребру SC). Затем аналогично строим фронтальную проекцию сечения ($D''E''F''$):

$$D \in (SA) \Rightarrow D^{IV} \rightarrow D' \in (S'A') \rightarrow D'' \in (S''A''), \text{ и т.д.}$$

Чтобы определить натуральную величину сечения, проведем параллельно ему дополнительную плоскость проекций π_5 (т.е. по сути, преобразуем плоскость α в плоскость уровня). Для этого проводим ось X_2 параллельно $f_{0\alpha}^{IV}$, замеряем расстояния от точек до плоскости проекций π_4 (это расстояния от оси X_1 до горизонтальных проекций точек) и откладываем их по соответствующим линиям связи от оси X_2 . Проекция сечения на π_5 ($\Delta D^VE^VF^V$) будет являться его натуральной величиной:

$$\alpha \perp \pi_4 \rightarrow \alpha \square \pi_5$$

$$X_1 \frac{\pi_4}{\pi_1} \rightarrow X_2 \frac{\pi_4}{\pi_5}, X_2 \square f_{0\alpha}^{IV}$$

$$|D', X_1| = |X_2, D^V|, \text{ и т.д.}$$

$$|\Delta D^VE^VF^V| \cong |\Delta DEF|$$

Затем необходимо определить видимость геометрических элементов. В данном случае фронтальная проекция отрезка DF и часть фронтального следа плоскости α будут невидимы для зрителя, так как скрыты от взгляда пирамидой. Эти участки показываем штриховой линией.

2. Определение натуральной величины основания (рисунок 7).

Основание пирамиды $SABC$ находится на плоскости проекций π_1 (т.к. фронтальные проекции точек A , B и C находятся на оси x), следовательно, его горизонтальная проекция и будет натуральной величиной основания:

$$A'', B'', C'' \subset x \Rightarrow (\Delta ABC) \subset \pi_1 \Rightarrow |\Delta A'B'C'| \cong |\Delta ABC|$$

3. Определение натуральной величины ребер (рисунок 7).

Для определения натуральной величины ребра (SA) воспользуемся способом плоскопараллельного перемещения (способ вращения без указания оси вращения). Ребро (SA) является отрезком прямой общего положения (ни одна из его проекций не параллельна оси x). Переместим его так, чтобы оно было параллельно плоскости проекций π_2 , в этом случае отрезок (SA) будет проецироваться на плоскость π_2 в натуральную величину:

$$(SA) - \text{ПрОП} \rightarrow (SA) \parallel \pi_2$$

Замеряем горизонтальную проекцию $(S'A')$ ребра, и перемещаем ее в положение $(\bar{S}'\bar{A}')$, т.е. когда горизонтальная проекция будет параллельна оси x . Проводим их точек \bar{S}' и \bar{A}' линии связи перпендикулярно оси x , а из точек S'' и A'' – линии связи параллельно оси x . На пересечение соответствующих линий связи будут точки \bar{S}'' и \bar{A}'' , а проекция $(\bar{S}''\bar{A}'')$ будет являться натуральной величиной ребра (SA)

:

$$(S'A') \rightarrow (\bar{S}'\bar{A}') \rightarrow (\bar{S}''\bar{A}'')$$

$$|\bar{S}''\bar{A}''| \cong |SA|$$

Чтобы найти натуральную величину отрезка (AD) , проведем из точки D'' линию связи параллельно оси x до пересечения с $(\bar{S}''\bar{A}'')$, и получим точку \bar{D}'' :

$$D'' \rightarrow \bar{D}''$$

$$|\bar{A}''\bar{D}''| \cong |AD|$$

Аналогично находим натуральные величины ребер (SB) , (SC) и отрезков (BE) и (CF) .

4. Построение развертки пирамиды (рисунок 8).

Развертку пирамиды строим способом триангуляции (треугольников). Для этого берем произвольно прямую a , отмечаем на ней вершину пирамиды S_0 и откладываем отрезок (S_0A_0) , равный натуральной величине ребра (SA) (отрезок $(\bar{S}''\bar{A}'')$ на рисунке 7). Из полученной точки A_0 проводим дугу окружности радиусом, равным натуральной величине отрезка (AB) (отрезок $(A'B')$ на рисунке 7), а из точки S_0 – дугу окружности радиусом, равным натуральной величине ребра (SB) (отрезок $(\bar{S}''\bar{B}'')$ на рисунке 7). На пересечении дуг получаем точку B_0 , а треугольник $S_0A_0B_0$ будет являться разверткой грани SAB пирамиды.

Достраивая аналогичным образом грани SBC и SAC , получаем развертку боковой поверхности пирамиды.

Замеряем натуральную величину отрезка (AD) (отрезок $(\bar{A}''\bar{D}'')$ на рисунке 7), откладываем от точки A_0 и получаем точку D_0 . Аналогично находим точки E_0 и F_0 .

При правильном и точном построении расстояния (D_0E_0) , (E_0F_0) и (F_0D_0) будут равны соответствующим сторонам сечения $(\Delta D^VE^VF^V$ на рисунке 7).

Пристраиваем натуральные величины сечения и основания.

Затем выделяем развертку усеченной части пирамиды сплошной основной линией, линии сгиба проводим штрихпунктирной линией с двумя точками.

Пример выполнения задачи №2 приведен на рисунке 9.

Случай 2: α – проецирующая плоскость (один из следов перпендикулярен к оси x , рисунок 10). Здесь по сравнению с предыдущим случаем отпадает необходимость первого преобразования, так как плоскость α уже является проецирующей. Тогда одна из проекций сечения известна (на рисунке 10 – сечение (ΔDEF) проецируется на π_2 в виде отрезка прямой и совпадает с фронтальным следом плоскости α):

$(D''E''F'')$ – прямая линия

Дальнейшие построения аналогичны рассмотренному выше примеру. На рисунке 10 приведен пример выполнения задачи №2 для случая, когда α – проецирующая плоскость.

Также случай пересечения многогранника с проецирующей плоскостью рассматривается в задаче №3 (случай 1).

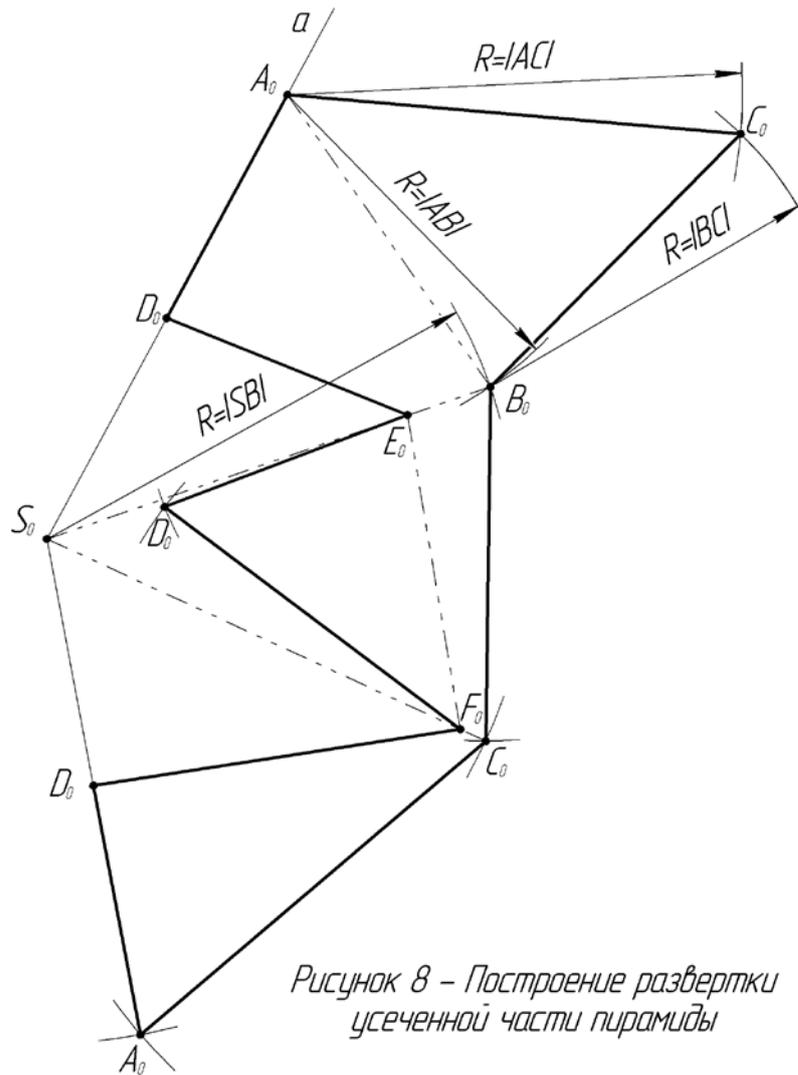


Рисунок 8 – Построение развертки усеченной части пирамиды

Контрольные вопросы к задаче №2

1. Следы плоскости. Покажите на Вашем чертеже следы плоскости.
2. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Какие плоскости называются проецирующими, плоскостями уровня, плоскостями общего положения? Как расположена секущая плоскость по отношению к различным плоскостям проекций на Вашем чертеже?
3. Определитель пирамидальной поверхности. Что называется гранью, ребром, основанием? Покажите их проекции на Вашем чертеже.
4. Определение сечения гранной поверхности плоскостью. Объяснить непосредственно на чертеже.
5. Какие способы определения натуральной величины отрезка существуют? Какой способ и как применяется для определения натуральной величины ребер пирамиды на Вашем чертеже?
6. Как находится натуральная величина плоской фигуры? Объяснить на примере сечения.
7. Какой способ применяется для разворачивания пирамидальных поверхностей? Объяснить суть способа на чертеже.

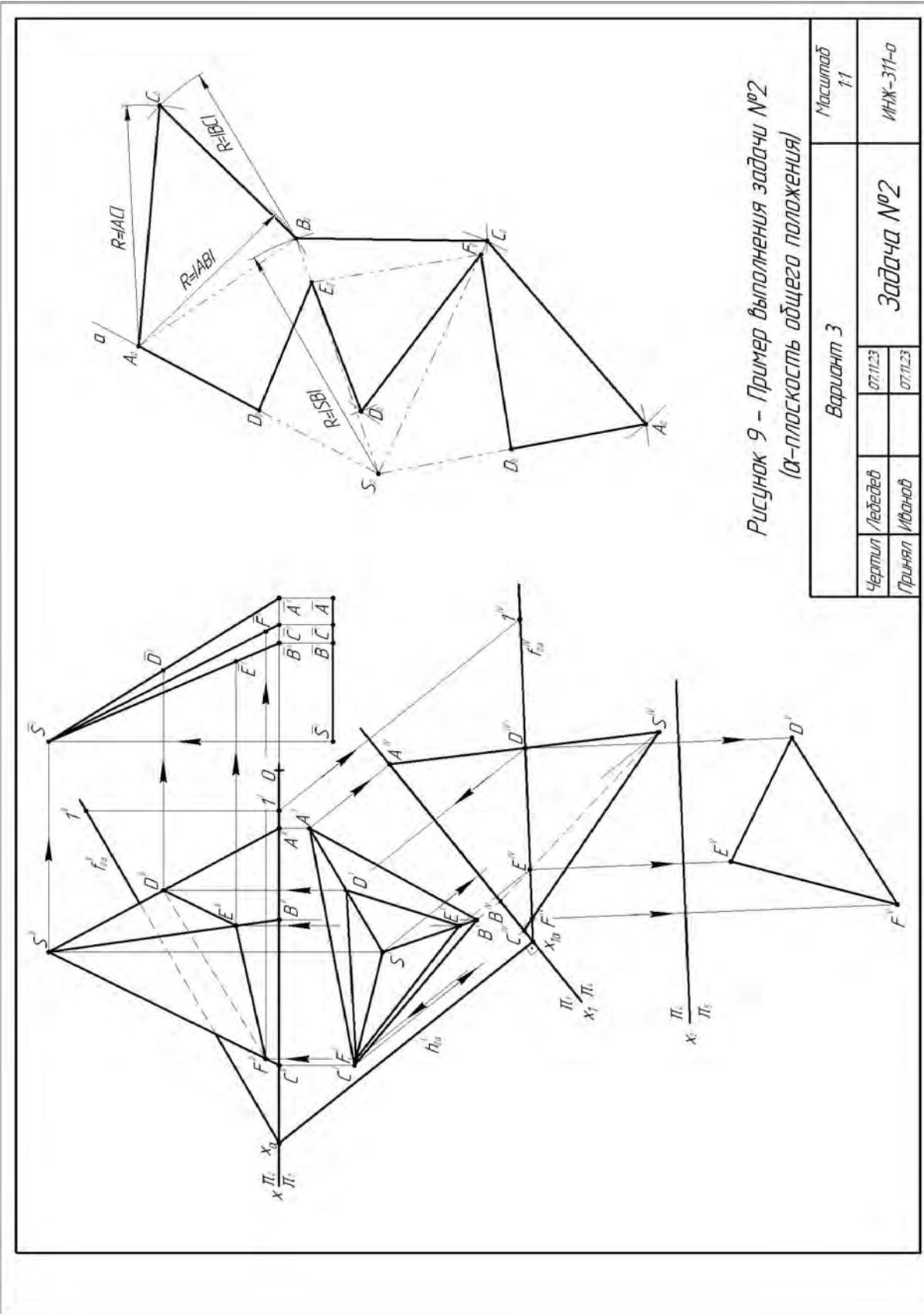


Рисунок 9 – Пример выполнения задачи №2
(α -плоскость общего положения)

Вариант 3		Масштаб 1:1	
Чертил / Лебедев	07.11.23	Задача №2	
Принял / Иванов	07.11.23		
		ИНЖ-311-0	

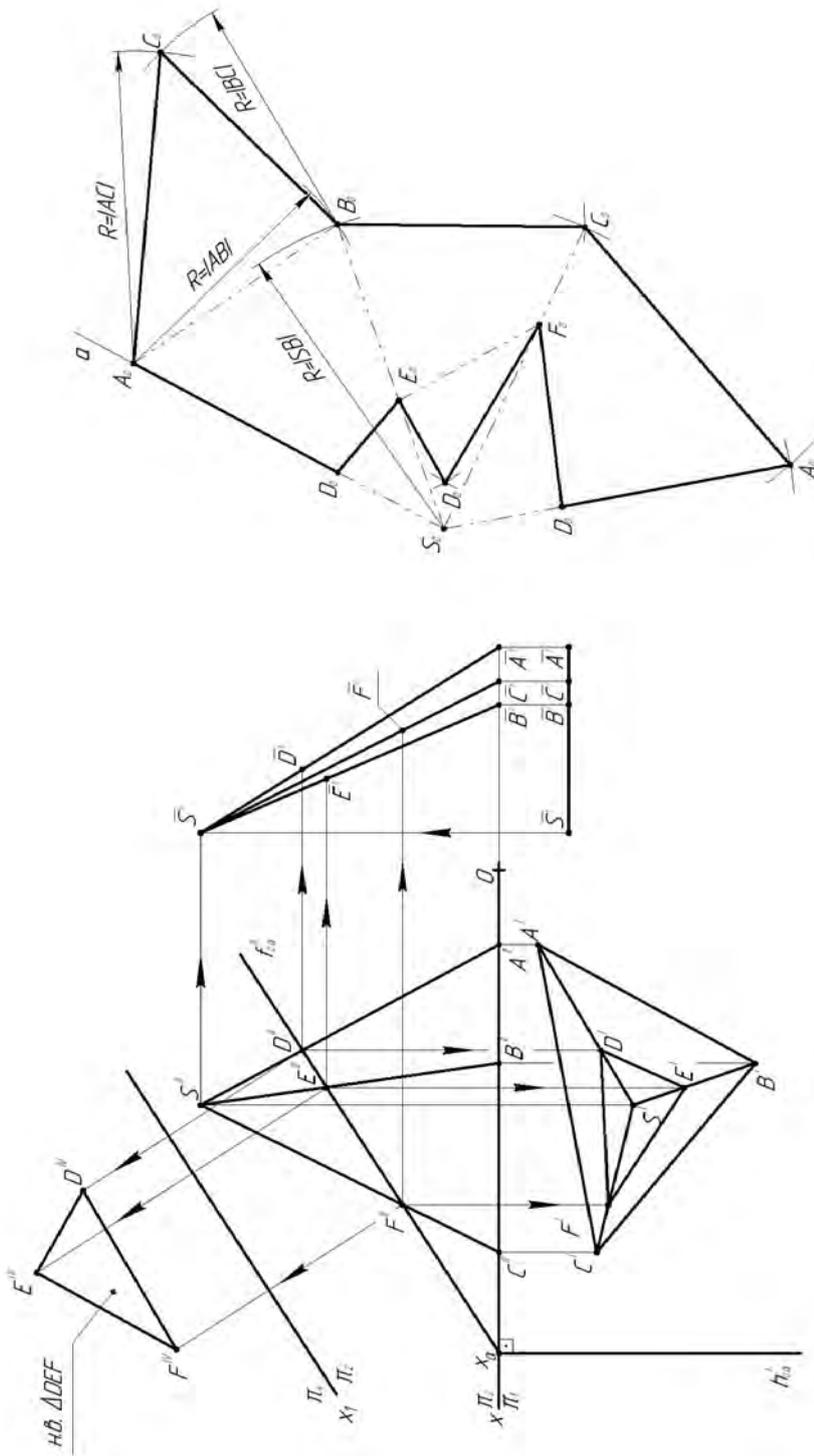


Рисунок 10 – Пример выполнения задачи №2
(α -проецирующая плоскость)

Вариант 4		Масштаб 1:1	
Чертил / Лебедев	07.11.23	Задача №2	
Принял / Иванов	07.11.23		

ЗАДАЧА №3

В задаче №3 решаются следующие вопросы:

- 1) построение линии пересечения призмы плоскостью;
- 2) определение натуральной величины сечения;
- 3) построение развертки призмы.

Задание. Призма $ABC_1B_1A_1$ пересекается плоскостью α (рисунок 11). Построить развертку усеченной части призмы.

Данные к задаче №3 приведены в таблице 3. Проекции точек B_1 и C_1 построить самостоятельно, учитывая, что все ребра призмы равны и параллельны между собой.

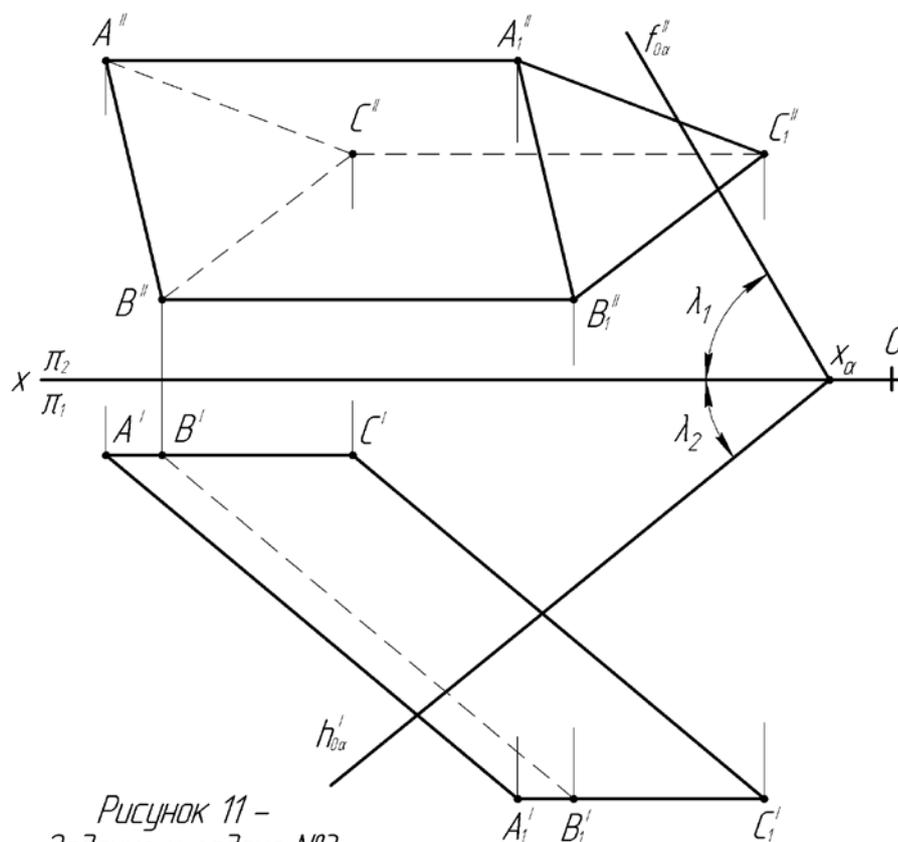


Рисунок 11 –
Задание к задаче №3

Построение развертки усеченной части призмы. Для построения развертки призмы необходимо иметь:

- 1) натуральную величину сечения;
- 2) натуральную величину основания;
- 3) натуральную величину каждого ребра.

Таблица 3 – Данные к задаче №3

Параметры	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Координаты, мм															
x_A	120	105	10	45	90	120	50	20	130	110	10	35	85	110	40
y_A	10	0	0	10	15	30	45	15	10	0	0	10	20	20	40
z_A	40	25	55	50	0	10	0	10	30	20	55	10	0	10	0
x_B	100	125	40	15	105	80	15	30	100	120	20	10	115	75	25
y_B	10	0	0	10	40	50	35	50	10	0	0	10	50	10	15
z_B	15	65	20	60	0	10	0	10	50	60	15	30	0	10	0
x_C	80	80	50	25	75	95	40	60	90	90	45	45	125	90	5
y_C	10	0	0	10	55	10	10	25	10	0	0	10	10	50	60
z_C	60	50	60	25	0	10	0	10	15	45	35	50	0	10	0
x_{A_1}	50	35	80	115	35	45	135	95	40	30	90	100	15	35	130
y_{A_1}	70	65	65	65	15	30	45	15	80	65	70	65	20	20	40
z_{A_1}	40	25	55	50	70	65	75	75	30	20	55	10	80	75	65
x_α	10	0	125	105	0	20	110	85	15	10	80	90	0	30	100
Углы, град.															
λ_1	90	45	90	120	30	45	120	135	90	45	90	120	45	45	135
λ_2	30	30	150	135	90	60	90	120	45	30	135	120	90	60	90
<p><i>Примечание.</i> Углы λ_1 и λ_2 – это углы между положительным направлением оси x и следами $f''_{0\alpha}$ и $h'_{0\alpha}$ соответственно. Если значение углов больше 90°, то эти углы – тупые.</p>															

Случай 1: α – проецирующая плоскость.

1. Построение сечения и определение его натуральной величины (рисунок 12).

Плоскость α – фронтально-проецирующая плоскость (т.к. горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$ перпендикулярен оси x):

$$h'_{0\alpha} \perp x \Rightarrow \alpha \perp \pi_2$$

Все точки, принадлежащие плоскости (в том числе и точки сечения) будут проецироваться на плоскость проекций π_2 на фронтальный след плоскости ($f''_{0\alpha}$). Поэтому фронтальная проекция сечения ($D''E''F''$) будет находиться на пересечении $f''_{0\alpha}$ с проекцией призмы ($A''B''C''C'_1B'_1A'_1$).

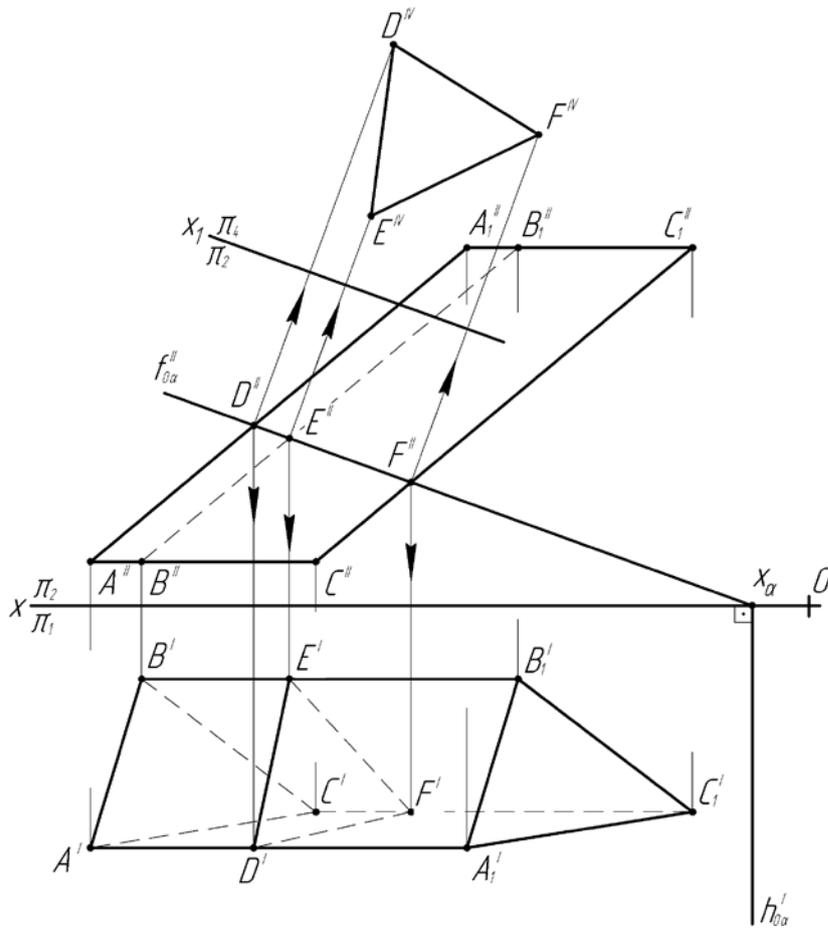


Рисунок 12 – Построение сечения призмы плоскостью и определение его натуральной величины

Горизонтальную проекцию сечения ($D'E'F'$) находим, проводя линии связи точек до пересечения с горизонтальными проекциями соответствующих ребер (точка D принадлежит ребру AA_1 , E – ребру BB_1 , F – ребру CC_1).

$$\left[\alpha \cap пр.(ABCC_1B_1A_1) \hat{\alpha} \perp \pi_2 \right] \Rightarrow f''_{0\alpha} \cap (A''B''C''C''_1B''_1A''_1) = (D''E''F'')$$

$$D \in (AA_1) \Rightarrow D'' \rightarrow D' \in (A'A'_1), \text{ и т.д.}$$

Чтобы определить натуральную величину сечения, проведем параллельно ему дополнительную плоскость проекций π_4 (т.е. преобразуем плоскость α в плоскость уровня). Для этого проводим ось x_1 параллельно $f''_{0\alpha}$, замеряем ординаты точек сечения (это расстояния от оси x до горизонтальных проекций точек) и откладываем их по соответствующим линиям связи от оси x_1 . Проекция сечения на плоскость π_4 ($\Delta D^{IV}E^{IV}F^{IV}$) будет являться его натуральной величиной:

$$\alpha \perp \pi_2 \rightarrow \alpha \square \pi_4$$

$$x \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\pi_2}{\pi_4}, x_1 \square f_{0\alpha}''$$

$$|D', x| = |x_1, D^{IV}|, \text{ и т.д.}$$

$$|\Delta D^{IV} E^{IV} F^{IV}| \cong |\Delta DEF|$$

Далее определяем видимость геометрических элементов. В данном случае для зрителя будут невидимы: горизонтальные проекции отрезков (DF) и (FE) , горизонтальные проекции сторон (AC) , (BC) основания и горизонтальная проекция ребра (CC_1) . Эти участки показываем штриховой линией.

2. Определение натуральной величины основания (рисунок 12).

Основание призмы $ABCC_1B_1A_1$ параллельно плоскости проекций π_1 (т.к. фронтальная проекция точек основания параллельна оси x), следовательно, его горизонтальная проекция и будет натуральной величиной основания:

$$(A''B''C'') \square x \Rightarrow (\Delta ABC) \square \pi_1 \Rightarrow |\Delta A'B'C'| \cong |\Delta ABC|$$

3. Определение натуральной величины ребер (рисунок 12).

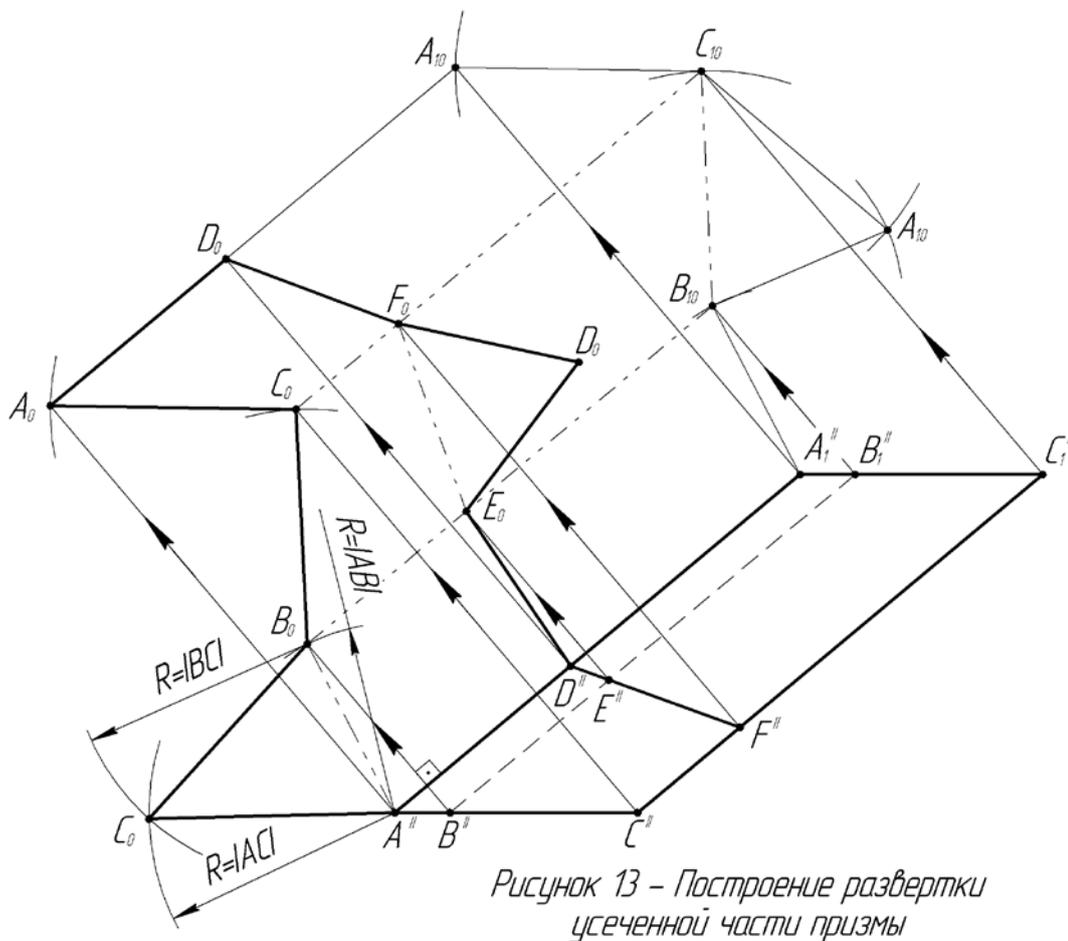
Ребра призмы $ABCC_1B_1A_1$ параллельны плоскости проекций π_2 (т.к. горизонтальные проекции ребер параллельны оси x), следовательно, фронтальные проекции ребер будут являться их натуральными величинами:

$$(A'A_1') \square x \Rightarrow (AA_1) \square \pi_2 \Rightarrow |A''A_1''| \cong |AA_1|$$

4. Построение развертки призмы (рисунок 13).

Т.к. ребра призмы параллельны одной плоскости проекций, а основания – другой, то развертку призмы строим способом раскатки. Для этого берем фронтальную проекцию призмы (т.е. ту проекцию, на которой ребра проецируются в натуральную величину) и проводим из точки B'' прямую, перпендикулярную проекции ребра призмы. Из точки A'' проводим дугу окружности радиусом, равным натуральной величине стороны (AB) основания (отрезок $(A'B')$ на рисунке 12). Там, где дуга пересечется с ранее проведенной прямой, получаем точку B_0 . Аналогично строим точку B_{10} и проводим ребро B_0B_{10} . Далее тем же способом последовательно строим ребра C_0C_{10} и A_0A_{10} .

Проводя из точек D'' , E'' и F'' прямые перпендикулярно проекции ребра призмы, получаем на пересечении с соответствующими ребрами точки сечения D_0 , E_0 и F_0 . При правильном и точном построении расстояния $(D''E_0)$, (E_0F_0) и (F_0D_0) будут равны соответствующим сторонам сечения $(\Delta D^{IV} E^{IV} F^{IV})$ на рисунке 12).



Далее пристраиваем натуральные величины оснований призмы и сечения.

Затем выделяем развертку усеченной части призмы сплошной основной линией, линии сгиба проводим штрихпунктирной линией с двумя точками.

Пример выполнения задачи №3 приведен на рисунке 14.

Случай 2: α – плоскость общего положения. В этом случае необходимо предварительное преобразование плоскости α в проецирующую плоскость. Например, на рисунке 15 вводится новая фронтальная плоскость проекций π_4 , перпендикулярная α . Для этого ось x_1 новой системы плоскостей проекций проводят перпендикулярно горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости α :

$$\alpha - \text{ПлОП} \rightarrow \alpha \perp \pi_4$$

$$x \frac{\pi_2}{\pi_1} \rightarrow x_1 \frac{\pi_4}{\pi_1}, x_1 \perp h'_{0\alpha}$$

Строим проекцию призмы и фронтального следа плоскости α на плоскость проекций π_4 . Дальнейшие построения аналогичны рассмотренному выше примеру. Также случай пересечения многогранника с плоскостью общего положения рассматривается в задаче №2 (случай 1).

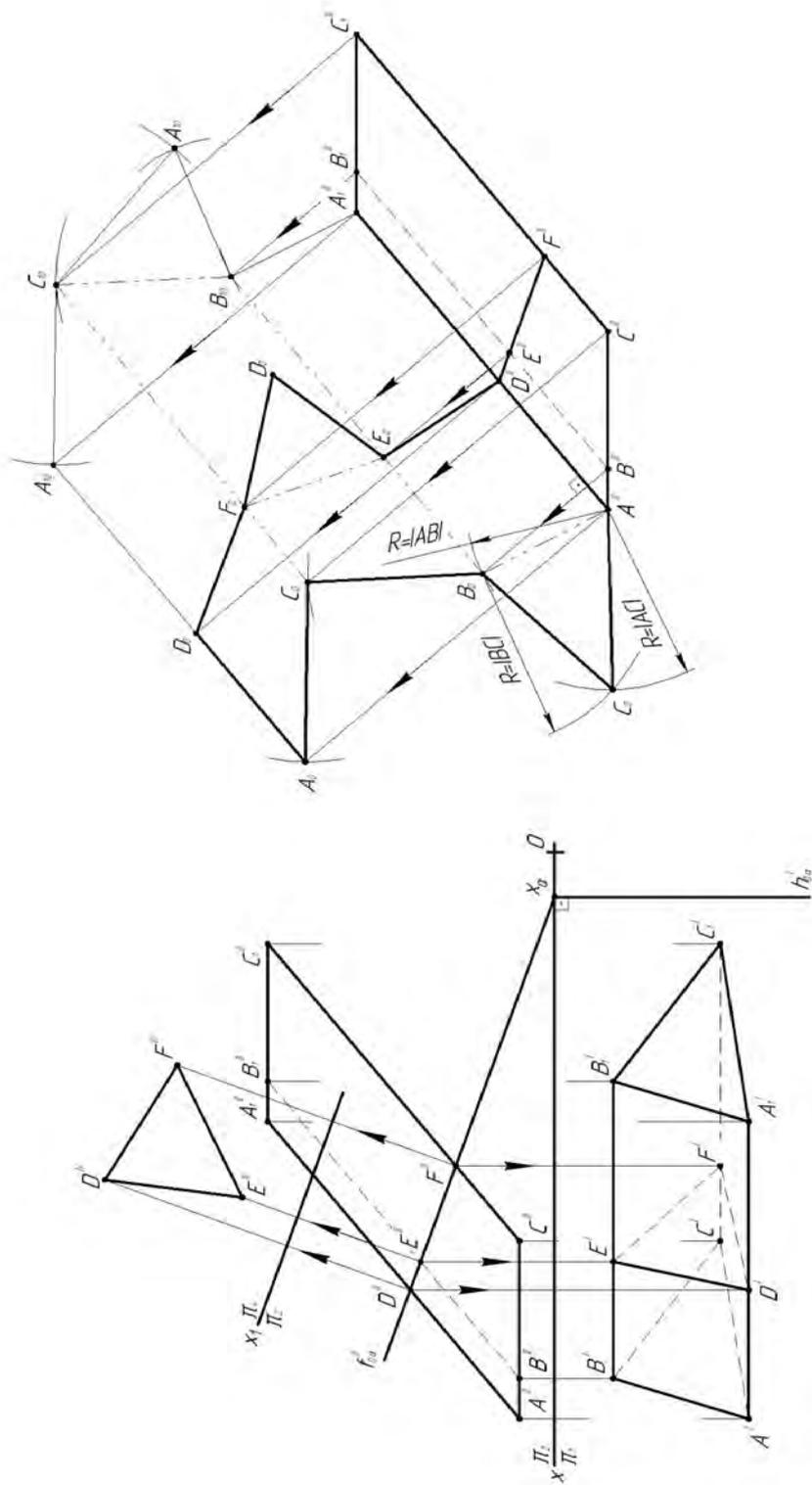


Рисунок 14 – Пример выполнения задачи №3
(α -проецирующая плоскость)

Вариант 4		Масштаб 1:1	
Чертит / Лебедев	12.11.23	Задача №3	
Принял / Иванюв	12.11.23		

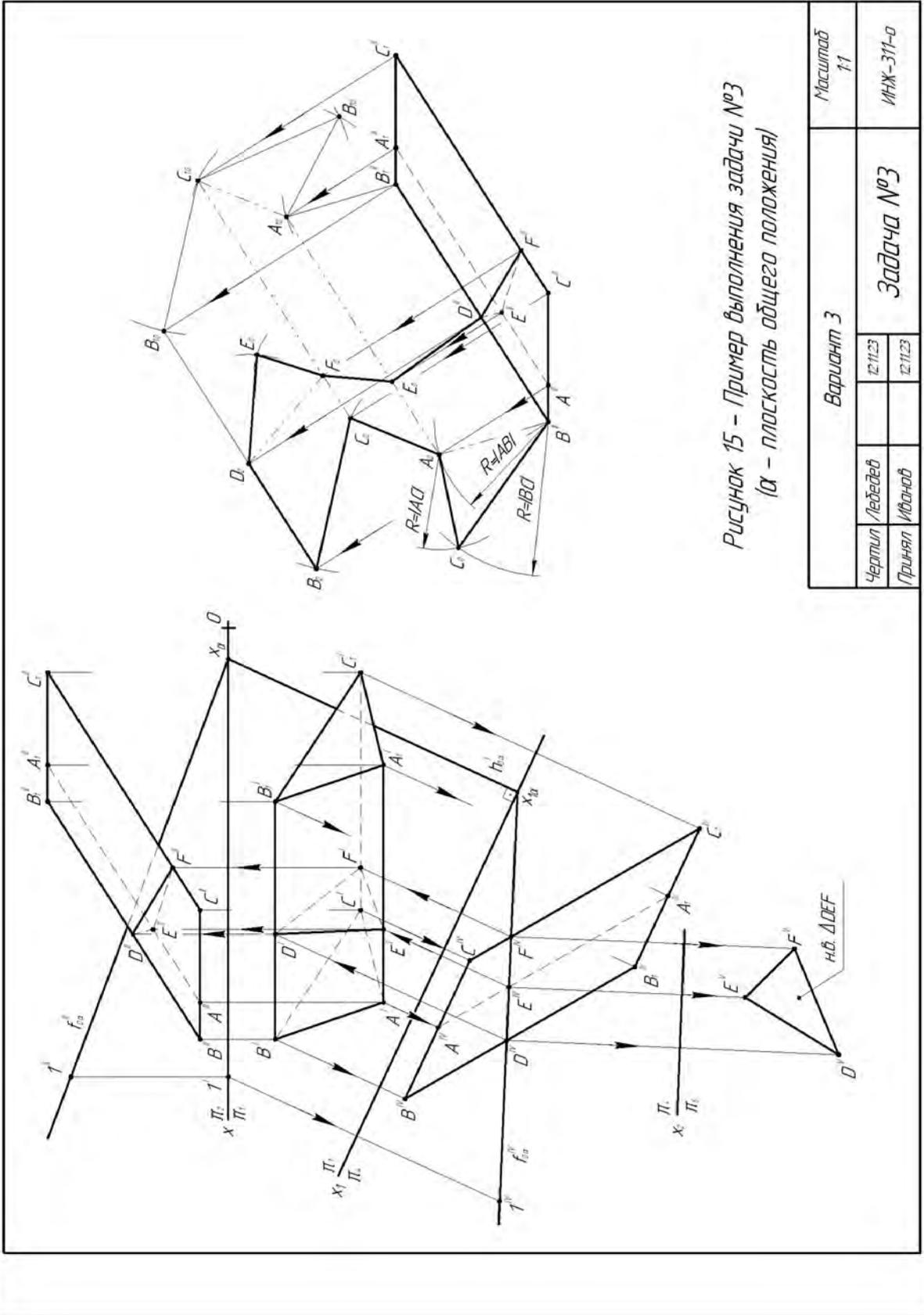


Рисунок 15 – Пример выполнения задачи №3
(α – плоскость общего положения)

Вариант 3		Масштаб	1:1
Чертил / Лебедев	12.11.23	Задача №3	
Принял / Иванов	12.11.23		
		ИНЖ-311-0	

Контрольные вопросы к задаче №3

1. Положение плоскости относительно плоскостей проекций. Как расположена секущая плоскость по отношению к различным плоскостям проекций на Вашем чертеже?

2. Определитель призматической поверхности. Что называется гранью, ребром, основанием? Покажите их проекции на Вашем чертеже.

3. Определение сечения гранной поверхности плоскостью. Объяснить непосредственно на чертеже.

4. Как расположены по отношению к плоскостям проекций ребра и основания призмы на Вашем чертеже?

5. Как находится натуральная величина сечения на Вашем чертеже?

6. Какие способы для разворачивания призматических поверхностей Вы знаете? Какой способ применяется на Вашем чертеже? Почему рациональнее применить именно этот способ? Объяснить суть способа на чертеже.

ЗАДАЧА №4

Задача №4 – на построение линии пересечения поверхности вращения проецирующей плоскостью.

Задание 1. Построить горизонтальную проекцию сквозного выреза в прямом круговом конусе (рисунок 16, а). Фронтальная проекция выреза задана ломаной линией $A''B''C''D''E''$. Центр основания конуса находится в точке $F(80,60,0)$, радиус основания $R = 50$ мм, высота конуса $h = 135$ мм. Определить видимость горизонтальной проекции линии выреза.

Задание 2. Построить горизонтальную проекцию сквозного выреза в сфере (рисунок 16, б). Фронтальная проекция выреза задана четырехугольником $K''L''M''N''$. Центр сферы находится в точке $G(80,60,60)$, радиус сферы $R = 50$ мм. Определить видимость горизонтальной проекции линии выреза.

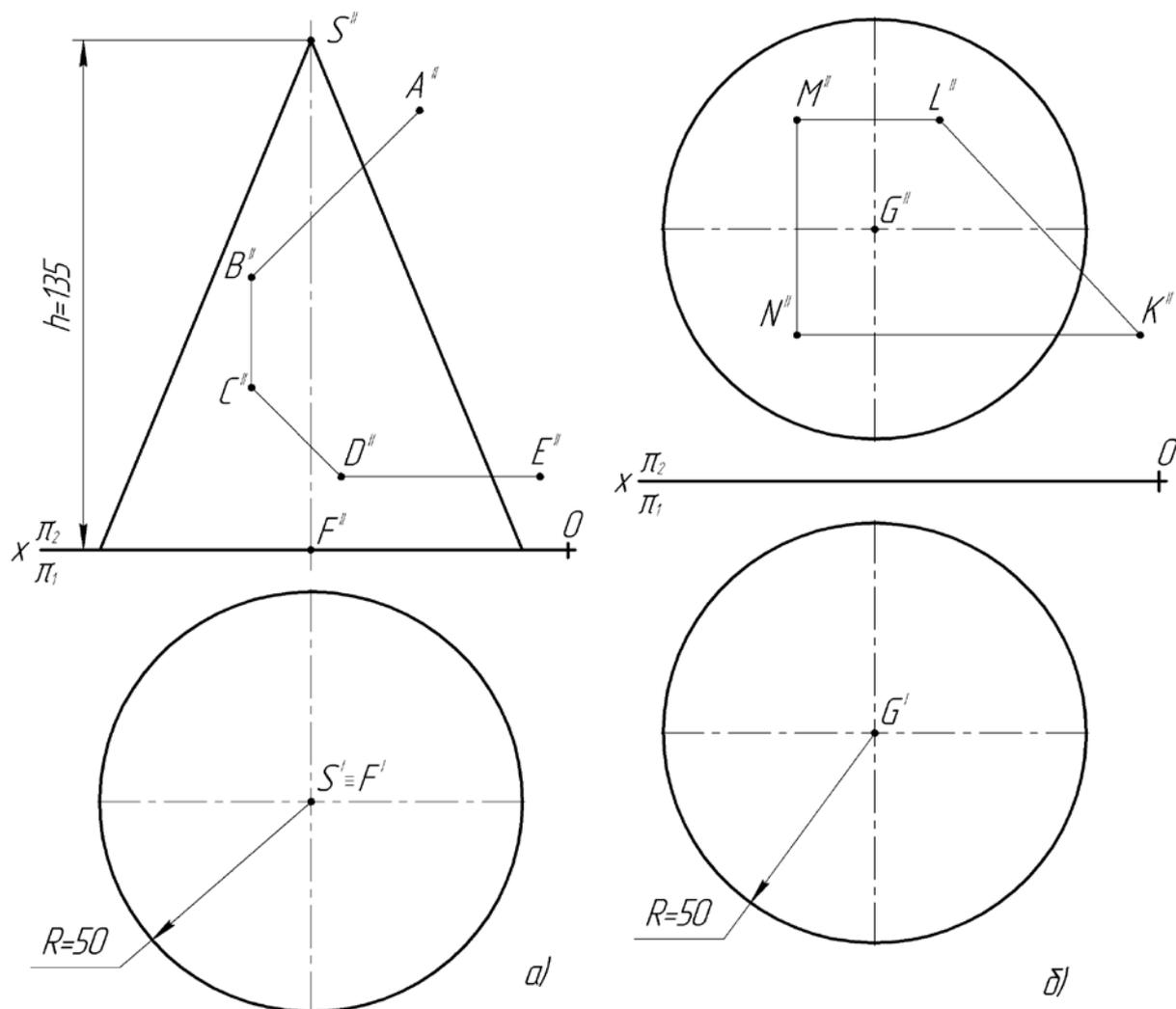


Рисунок 16 – Задание к задаче №4

Данные к задаче №4 приведены в таблице 4. Ординаты точек (Y_A , Y_B , Y_C , и т.д.) не задаются.

Таблица 4 – Данные к задаче №4 (координаты даны в мм)

Координаты	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Вырез $A''B''C''D''E''$															
X_A	50	55	65	45	20	25	30	20	100	95	105	100	140	125	135
Z_A	110	115	120	80	10	30	20	25	125	115	95	115	10	20	15
X_B	85	90	85	100	90	90	85	70	75	65	70	60	60	65	70
Z_B	75	80	85	60	40	50	45	45	80	80	75	65	40	45	40
X_C	85	90	85	100	90	90	85	70	75	65	70	60	60	65	70
Z_C	45	40	60	40	65	75	70	65	50	55	50	45	65	65	55
X_D	70	60	55	90	75	90	85	90	100	95	105	80	90	75	85
Z_D	20	25	30	25	80	95	85	90	20	30	15	20	85	90	80
X_E	25	35	30	30	40	55	45	50	135	130	135	135	115	100	105
Z_E	20	25	30	25	80	95	85	90	20	30	15	20	85	90	80
Вырез $K''L''M''N''$															
X_K	130	125	130	135	120	130	125	130	30	20	30	35	25	30	20
Z_K	30	25	40	35	95	80	85	70	25	40	30	25	75	95	80
X_L	65	90	90	85	90	70	85	95	70	70	60	75	90	70	85
Z_L	80	80	95	90	45	35	30	30	75	95	75	80	30	45	35
X_M	45	50	55	55	60	50	60	55	100	100	110	105	105	105	110
Z_N	80	80	95	90	45	35	30	30	75	95	75	80	30	45	35
X_N	45	50	55	55	60	50	60	55	100	100	110	105	105	105	110
Z_N	30	25	40	35	95	80	85	70	25	40	30	25	75	95	80

Построение горизонтальной проекции выреза конуса.

Фронтальная проекция выреза $A''B''C''D''E''$ конуса (S, F) представляет собой фронтальные следы проецирующих плоскостей. Для построения линии пересечения конуса с проецирующими плоскостями воспользуемся способом вспомогательных плоскостей-посредников.

Определяем плоскость главного меридиана ($\Gamma\Gamma M$) конуса. Это плоскость, проходящая через ось конуса и параллельная фронтальной плоскости проекций (рисунок 17). Тогда линия, получаемая при пересечении $\Gamma\Gamma M$ с конусом – главный меридиан (ΓM) – на фронтальной плоскости проекций будет совпадать с фронтальной проекцией конуса.

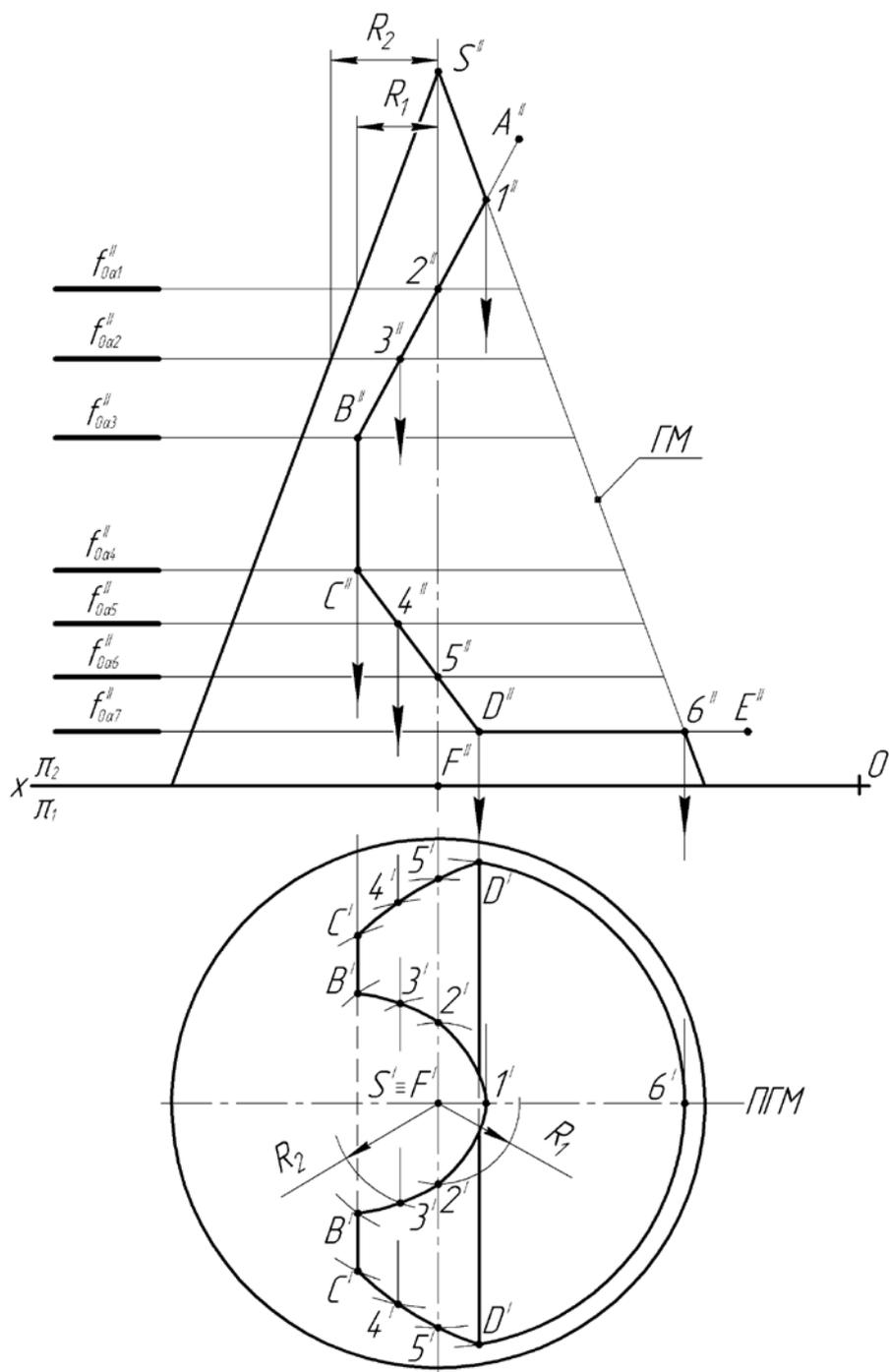


Рисунок 17 – Построение горизонтальной проекции выреза конуса

Фронтальная проекция $A''B''$ представляет собой фронтальный след проецирующей плоскости, при пересечении которой с конусом в сечении получается эллипс.

Для построения части этого эллипса на пересечении $A''B''$ с ΓM конуса берем точку $1''$ и находим ее горизонтальную проекцию ($1'$), учитывая, что точка находится в ПГМ :

$$1 \in \text{ПГМ} \Rightarrow 1'' \rightarrow 1'$$

Далее берем точку $2''$. Чтобы построить ее горизонтальную проекцию ($2'$), через точку проводим горизонтальную плоскость-посредник α_1 (фронтальный след плоскости $f''_{0\alpha_1}$ параллелен оси x). При пересечении плоскости α_1 с конусом образуется окружность радиусом R_1 , параллельная плоскости π_1 . Следовательно, на плоскость π_1 эта окружность будет проецироваться в натуральную величину. Чтобы построить проекцию этой окружности, проводим дугу окружности с центром в точке S' и радиусом R_1 . На пересечении этой дуги с линией связи точки 2 получаем две точки. Так как эти точки симметричны, то обозначим их одинаково – $2'$:

$$\alpha_1 \ni 2 \wedge \alpha_1 \perp \pi_1 \Rightarrow f''_{0\alpha_1} \ni 2'' \wedge f''_{0\alpha_1} \perp x$$

$$2'' \rightarrow 2' \in \text{окр.}(S', R_1)$$

Аналогичным образом находим горизонтальные проекции точек B , C , D и произвольно взятых точек $3 - 5$, а также точки 6 , находящейся в ПГМ.

Полученные проекции точек соединяем по порядку и получаем горизонтальную проекцию выреза конуса. Невидимые участки линии показываем штрихпунктирной линией.

Построение горизонтальной проекции выреза сферы. Для построения горизонтальной проекции выреза сферы (G, R) проводим горизонтальные плоскости-посредники $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ (рисунок 18). Для определения границ видимости обязательно проводим одну из плоскостей (в данном случае – плоскость α_3) через центр сферы – точку G .

Далее находим горизонтальные проекции точек, как рассмотрено в приведенном выше примере (построение горизонтальной проекции выреза конуса). Горизонтальные проекции точек 2 и 6 , полученные с помощью плоскости α_3 , будут границами видимости линии на горизонтальной плоскости проекций.

В завершении соединяем по порядку полученные горизонтальные проекции точек с учетом их видимости.

Пример выполнения задачи №4 приведен на рисунке 19.

Контрольные вопросы к задаче №4

1. Поверхность вращения общего вида, ее определитель.
2. Какие линии называются параллелями? Покажите параллели на Вашем чертеже.
3. Какие плоскости называются меридиональными? Покажите, как бы они проходили на Вашем чертеже. Как бы они располагались по отношению к горизонтальной плоскости проекций?
4. Что называется меридианом?

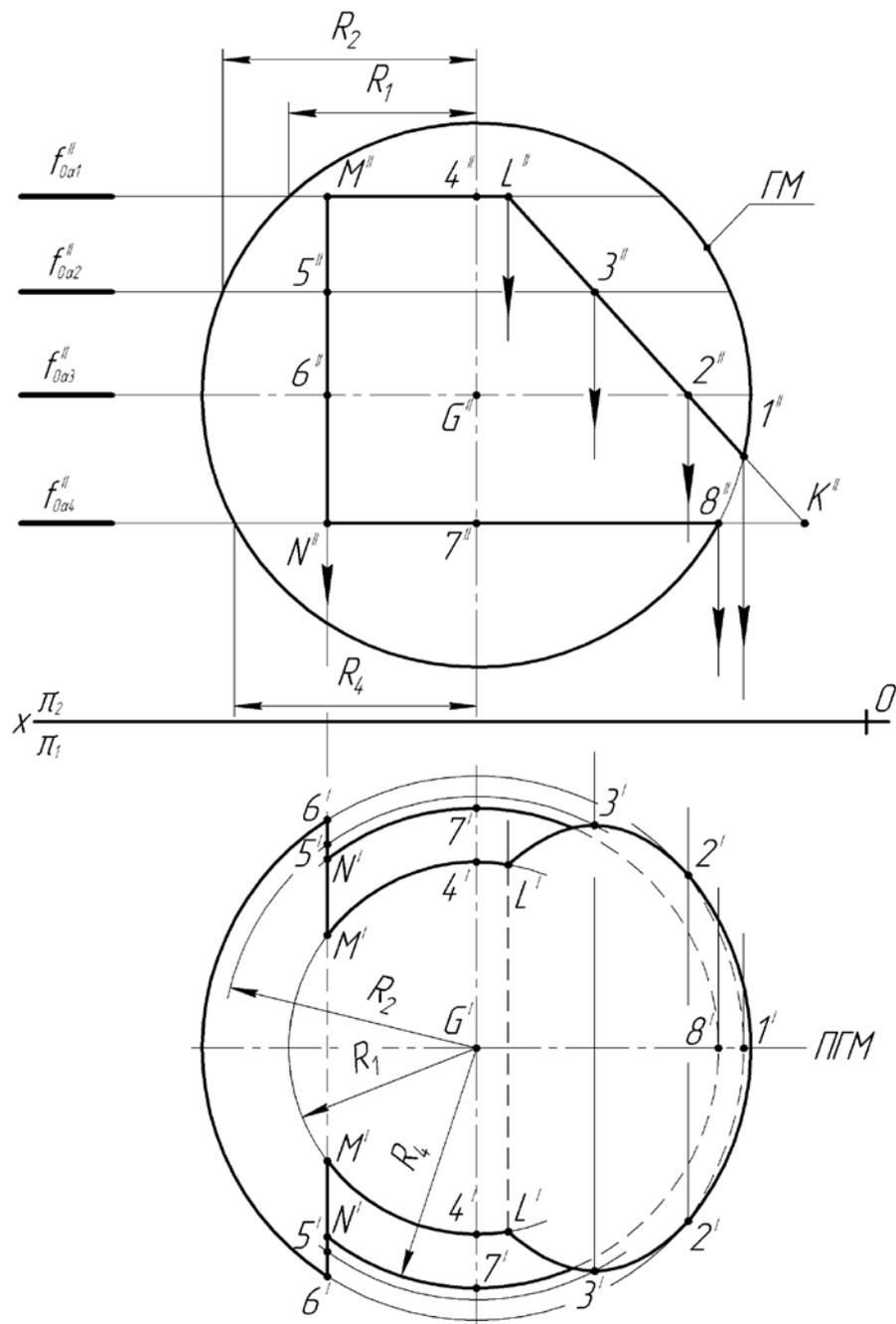


Рисунок 18 – Построение горизонтальной проекции выреза сферы

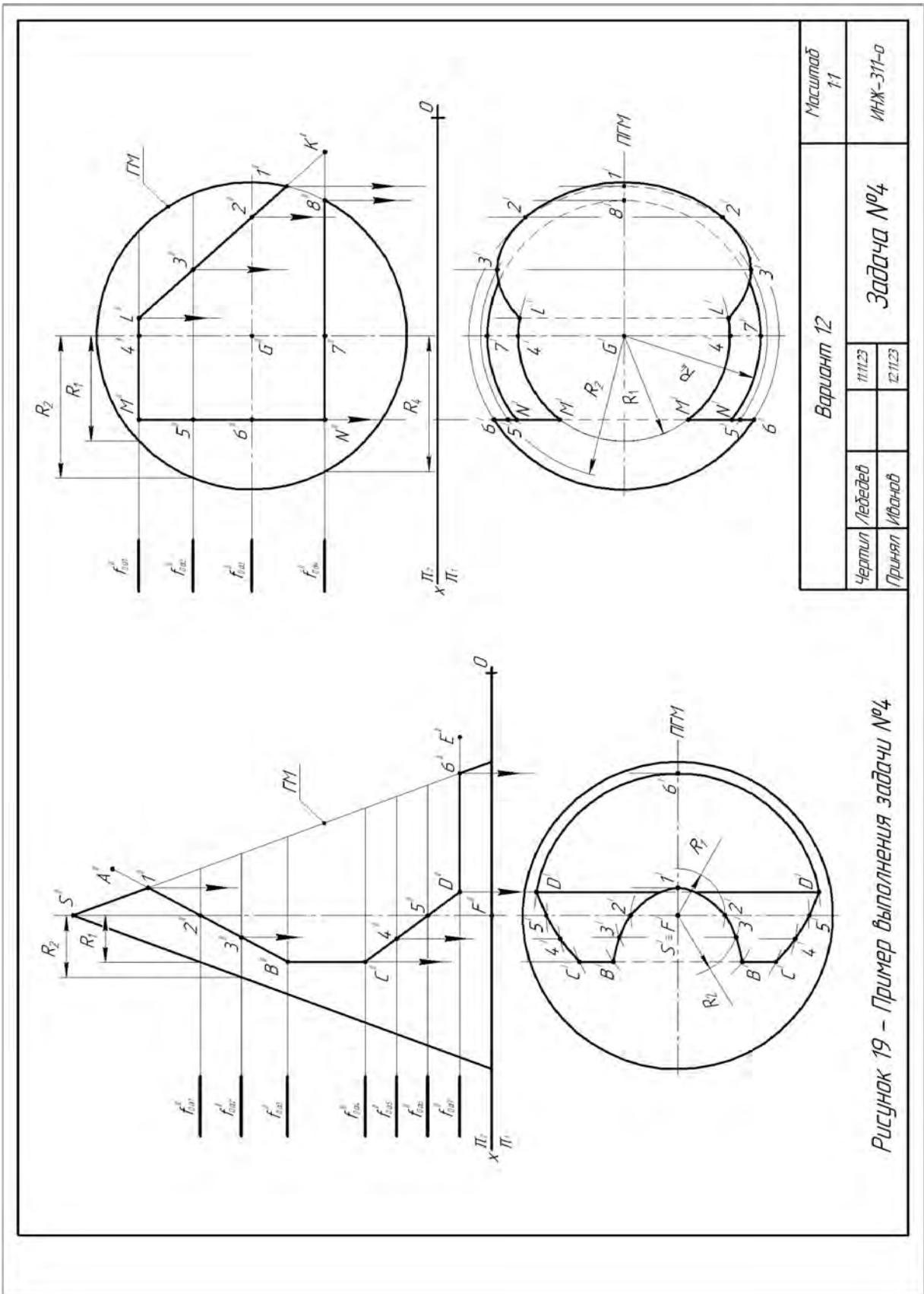
5. Какая плоскость является плоскостью главного меридиана? Покажите **ПГМ** на Вашем чертеже. Как она расположена по отношению к плоскостям проекций?

6. Что называется главным меридианом поверхности? Покажите **ГМ** на Вашем чертеже.

7. Алгоритм построения сечения поверхности проецирующей плоскостью.

8. Какие линии получаются в сечении конуса проецирующей плоскостью, если проецирующая плоскость:

- проходит через ось конуса;
 - перпендикулярна оси;
 - параллельна одной образующей конуса;
 - параллельна двум образующим конуса;
 - пересекает все образующие, но не перпендикулярна оси.
9. Какие линии получаются в сечении сферы плоскостью?
10. Как определяются границы видимости на горизонтальной плоскости проекций?
11. Как расположены плоскости-посредники на Вашем чертеже?



Чертил / Лебедев		11.11.23		Вариант 12		Масштаб 1:1	
Принял / Иванюв		12.11.23		Задача №4		ИНЖ-311-0	

Рисунок 19 – Пример выполнения задачи №4

ЗАДАЧА №5

Задача №5 – на построение сечения поверхности вращения плоскостью общего положения.

Задание 1. Построить сечение конуса плоскостью α (рисунок 20, а). Центр основания конуса находится в точке F , радиус основания R , высота конуса h . Определить видимость линии пересечения.

Задание 2. Построить сечение сферы плоскостью β (рисунок 20, б). Центр сферы находится в точке G , радиус сферы R (равен радиусу основания конуса). Определить видимость линии пересечения.

Данные к задаче №5 приведены в таблице 5.

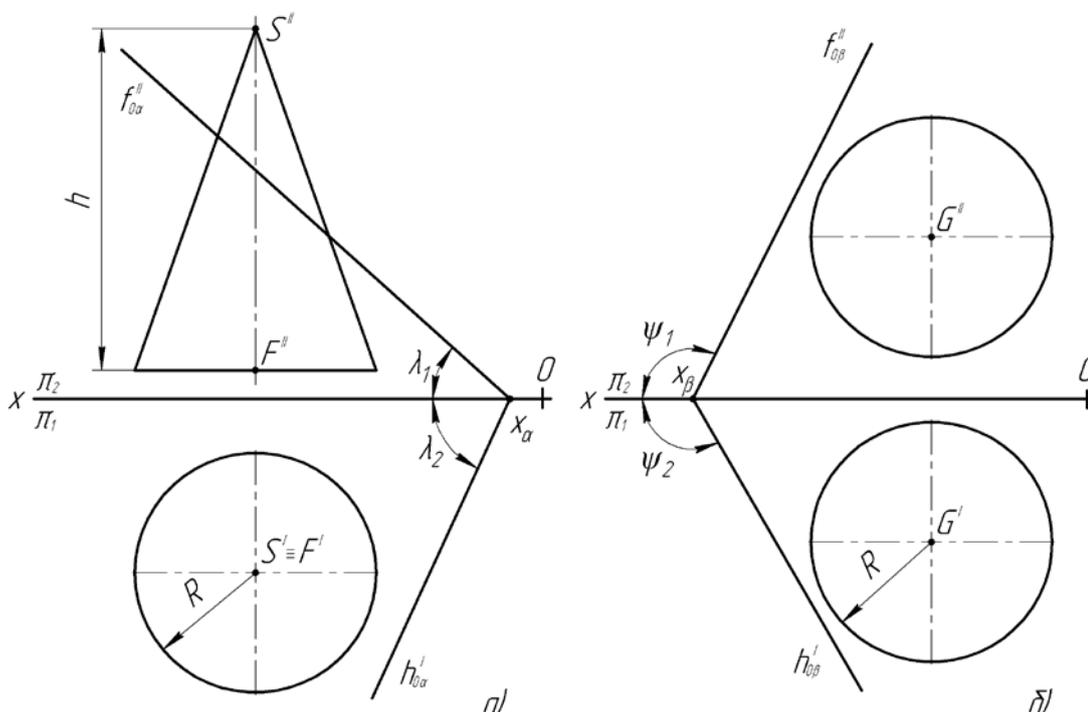


Рисунок 20 – Задание к задаче №5

Построение сечение конуса плоскостью α . Плоскость α является плоскостью общего положения. Преобразуем ее во фронтально-проецирующую плоскость, для этого введем новую фронтальную плоскость проекций π_4 , перпендикулярную α . В этом случае ось x_1 новой системы плоскостей проекций будет перпендикулярна горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ плоскости α (рисунок 21):

$$\alpha - \text{ПлОП} \rightarrow \alpha \perp \pi_4$$

$$x \begin{matrix} \pi_2 \\ \pi_1 \end{matrix} \rightarrow x_1 \begin{matrix} \pi_4 \\ \pi_1 \end{matrix}, x_1 \perp h'_{0\alpha}$$

Таблица 5 – Данные к задаче №5

Параметры	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Размеры, мм															
x_F	75	70	60	55	75	70	60	55	50	50	65	80	65	70	60
y_F	40	45	50	55	40	45	50	55	50	45	55	50	45	50	35
z_F	0	0	10	5	0	0	10	5	0	10	0	5	0	10	0
h	85	80	80	80	85	80	80	80	90	80	70	75	85	80	90
R	35	35	35	40	35	35	35	40	35	35	30	35	35	30	30
x_α	130	125	135	130	10	0	0	0	110	130	120	15	20	15	0
x_G	75	70	70	65	55	60	50	50	80	75	70	60	50	55	60
y_G	40	45	50	55	40	45	50	55	50	45	55	50	45	55	35
z_G	45	45	40	45	45	45	40	45	40	50	40	40	50	40	45
x_β	20	10	0	0	120	120	115	125	15	5	0	115	120	105	120
Углы, град.															
λ_1	150	150	150	135	45	30	45	45	135	150	150	30	45	30	30
λ_2	135	120	120	135	60	60	60	60	120	120	120	60	60	45	60
ψ_1	60	45	60	60	120	120	135	135	45	60	60	120	120	120	135
ψ_2	45	60	60	60	120	135	120	120	60	45	60	120	135	135	120
<i>Примечание.</i> Углы λ_1 , λ_2 , ψ_1 и ψ_2 – это углы между положительным направлением оси x и следами $f''_{0\alpha}$, $h'_{0\alpha}$, $f''_{0\beta}$ и $h'_{0\beta}$ соответственно. Если значение углов больше 90° , то эти углы – тупые.															

Находим новые фронтальные проекции вершины S и центра F основания конуса (S^{IV} и F^{IV}) и строим проекцию конуса на плоскость проекций π_4 . С помощью точки 1 находим положение нового фронтального следа плоскости ($f_{0\alpha}^{IV}$):

$$\text{кон.}(S, F)'' \rightarrow \text{кон.}(S, F)^{IV}$$

$$f_{0\alpha}'' \rightarrow f_{0\alpha}^{IV}$$

Так как в системе плоскостей проекций $\chi_1 \frac{\pi_4}{\pi_1}$ плоскость α будет проецирующей, то на пересечении $f_{0\alpha}^{IV}$ с проекцией конуса получим проекции точек A , B и C (A^{IV} , B^{IV} и C^{IV}), причем точка A будет наивысшей точкой сечения, а точки B и C – наименьшими точками сечения.

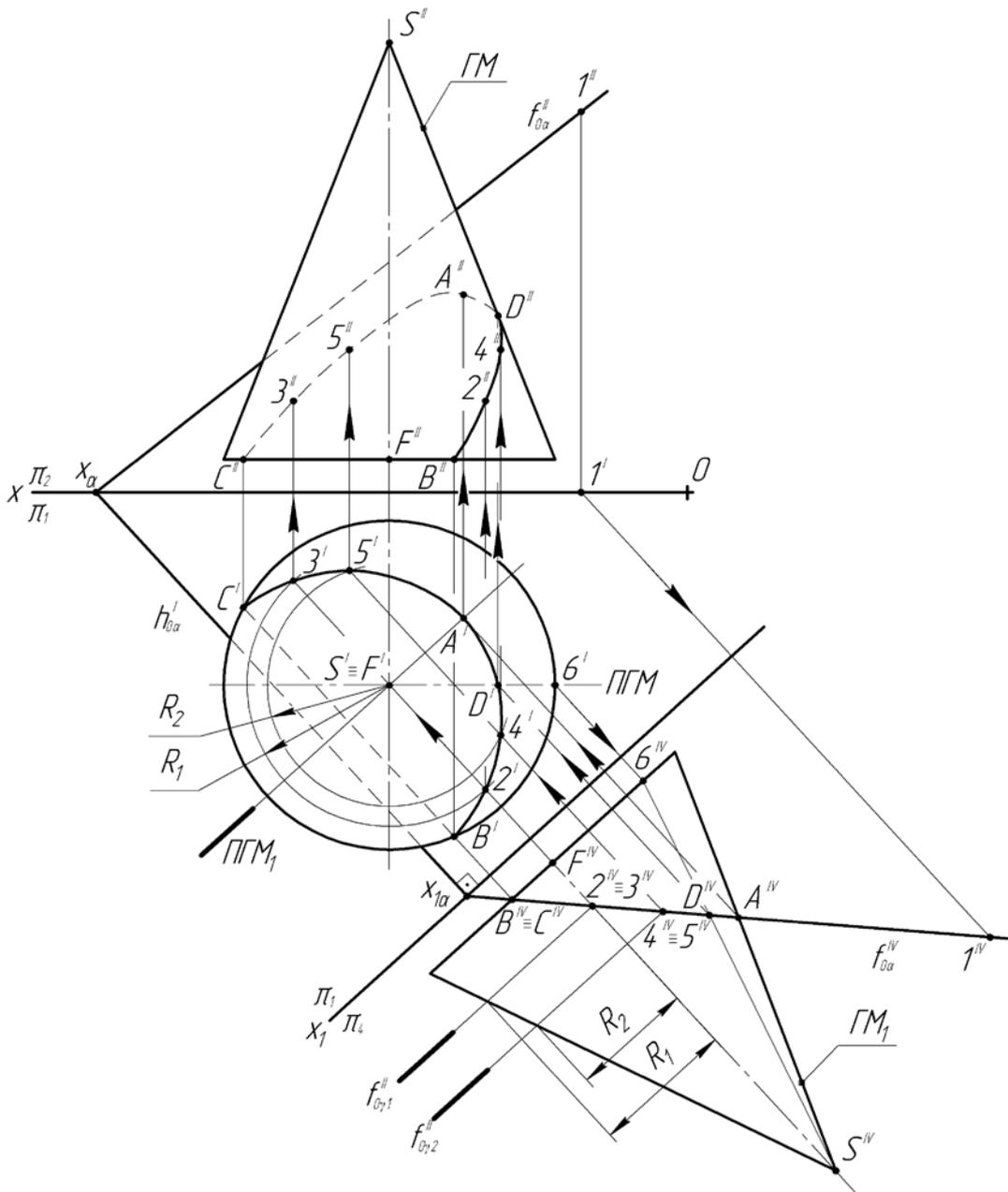


Рисунок 21 – Построение сечения конуса плоскостью

Точка A находится в плоскости главного меридиана (ПГМ_1), параллельной π_4 , следовательно, горизонтальную проекцию точки (A') строим, проводя линию связи до пересечения с ПГМ_1 , а фронтальную проекцию (A'') – отложив по линии связи аппликату точки A . Точки B и C принадлежат основанию конуса, следовательно, проекции этих точек будут принадлежать соответствующим проекциям основания:

$$[\alpha \cap \text{кон.}(S,F) \wedge \alpha \perp \pi_4] \Rightarrow f_{0\alpha}^{IV} \cap \text{кон.}(S,F)^{IV} = A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}$$

$$A^{IV} \rightarrow A' \in \text{ПГМ}_1 \rightarrow A''$$

$$B^{IV}, C^{IV} \rightarrow B', C' \rightarrow B'', C''$$

Примечание. На рисунке 21 плоскость α пересекает основание конуса. В случае если плоскость не пересекает основание конуса, а пересекает все образующие конуса, то в сечении будет эллипс. Тогда на пересечении нового фронтального следа плоскости α с проекцией конуса на плоскость π_4 найдем большую ось эллипса (БОЭ). Малая ось эллипса (МОЭ) будет перпендикулярна БОЭ и будет проецироваться на плоскость проекций π_4 в точку (подробнее см. ниже «Построение сечения сферы плоскостью β », рисунок 22).

Строим промежуточные точки сечения. Для этого вводим вспомогательную горизонтальную плоскость γ_1 ; ее след на плоскости π_4 ($f_{0\gamma_1}^{IV}$) проводим параллельно оси x_1 на произвольном расстоянии. На пересечении следа плоскости γ_1 ($f_{0\gamma_1}^{IV}$) и нового фронтального следа плоскости α ($f_{0\alpha}^{IV}$) получим точку, которая будет одновременно являться проекцией двух точек – 2 и 3 (2^{IV} и 3^{IV}). Чтобы найти горизонтальные проекции этих точек, замеряем радиус окружности, которую будет отсекать плоскость γ_1 от конуса (R_1). Строим окружность радиусом R_1 с центром в точке F' , на пересечении этой окружности с линией связи точек 2 и 3 находим их горизонтальные проекции ($2'$ и $3'$). Фронтальные проекции точек 2 и 3 ($2''$ и $3''$) найдем, откладывая по линиям связи точек их аппликаты:

$$\begin{aligned} f_{0\gamma_1}^{IV} \square x_1 \\ f_{0\gamma_1}^{IV} \cap f_{0\alpha}^{IV} = 2^{IV}, 3^{IV} \\ 2^{IV}, 3^{IV} \rightarrow 2', 3' \subset \text{окр.}(F', R_1) \rightarrow 2'', 3'' \end{aligned}$$

Аналогично вводим вспомогательную плоскость γ_2 и с ее помощью строим проекции точек 4 и 5.

Определяем видимость линии пересечения. На горизонтальной проекции будут невидимы только те точки линии пересечения, которые принадлежат основанию конуса. На фронтальной проекции точки, находящиеся перед ПГМ (по отношению к зрителю), будут видимы, точки, находящиеся за ПГМ – соответственно, не видимы.

Найдем границы видимости, для этого на плоскость π_4 спроецируем граничную образующую, проходящую через вершину конуса и точку 6, которая принадлежит ГМ. На пересечении новой фронтальной проекции этой образующей со следом $f_{0\alpha}^{IV}$ находим проекцию точки D (D^{IV}) – границы видимости. Горизонтальная проекция точки D (D') будет находиться в ПГМ, а фронтальную проекцию (D'') определим, откладывая аппликату точки D по линии связи:

$$6' \rightarrow 6^{IV}$$

$$f_{0\alpha}^{IV} \cap (S^{IV} 6^{IV}) = D^{IV}$$

$$D^{IV} \rightarrow D' \in ПГМ \rightarrow D''$$

Построение сечения сферы плоскостью β . Плоскость общего положения β преобразовываем во фронтально-проецирующую плоскость (рисунок 22), и находим наивысшую и наинизшую точки сечения (точки A и B соответственно).

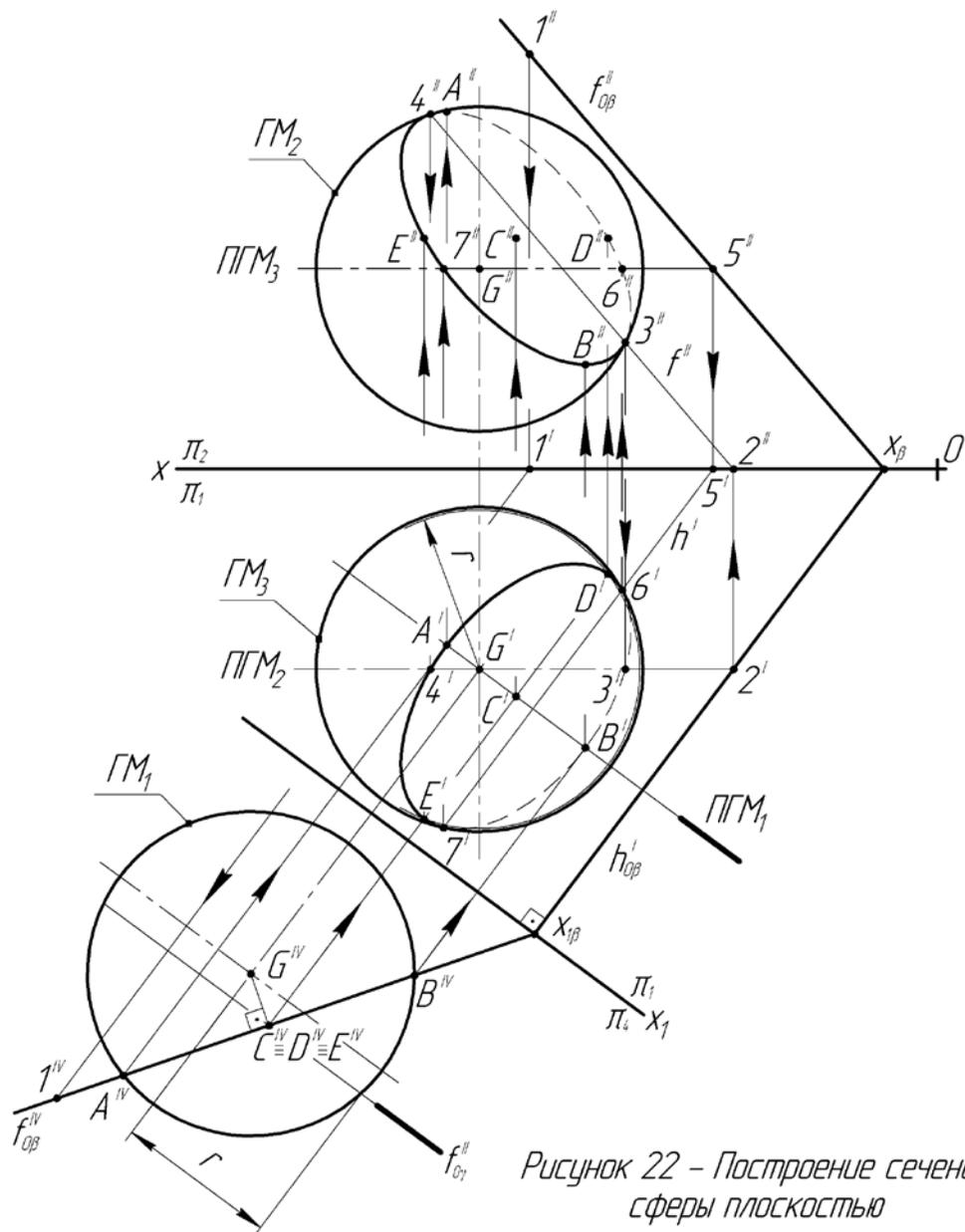
В сечении сферы плоскостью будет окружность, которая будет проецироваться на плоскость π_1 в виде эллипса. $[A'B']$ будет являться малой осью эллипса (МОЭ). Найдем большую ось эллипса (БОЭ). Для этого необходимо разделить пополам $[A^{IV}B^{IV}]$: опускаем из G^{IV} перпендикуляр на $[A^{IV}B^{IV}]$. Основание перпендикуляра будет являться одновременно проекцией середины окружности (точки C) и проекцией концов диаметра (DE) на π_4 . Чтобы найти горизонтальные проекции точек D и E , через эти точки проводим горизонтальную плоскость γ (след плоскости на π_4 будет проходить через D^{IV} параллельно оси x_1). Этой плоскостью от сферы будет отсекается окружность радиуса r . Горизонтальные проекции точек D и E (D' и E') найдем, проведя линии связи до пересечения с окружностью с центром в точке G' и радиусом r ; фронтальные проекции (D'' и E'') – отложив по линиям связи аппликаты точек.

Определим границы видимости проекций линии сечения. Чтобы определить границы видимости на фронтальной плоскости проекций, введем плоскость главного меридиана, параллельную π_2 ($ПГМ_2$). Линия пересечения $ПГМ_2$ с плоскостью β будет являться фронталью (f), горизонтальный след которой (точка 2) будет принадлежать горизонтальному следу плоскости β ($h'_{0\beta}$). На пересечении главного меридиана сферы ($ГМ_2$) с фронтальной проекцией фронтали (f'') находим фронтальные проекции точек 3 и 4 ($3''$ и $4''$), которые и будут являться границами видимости линии пересечения на π_2 . Горизонтальные проекции точек будут принадлежать $ПГМ_2$.

Аналогично, с помощью плоскости главного меридиана $ПГМ_3$, находим границы видимости на π_1 – точки 6 и 7.

В завершении соединяем по порядку соответствующие проекции точек с учетом их видимости.

Пример выполнения задачи №5 приведен на рисунке 23.



Контрольные вопросы к задаче №5

1. Поверхность вращения общего вида, ее определитель.
2. Какая плоскость является плоскостью главного меридиана? Покажите ПГМ на Вашем чертеже. Как она (они) расположена (расположены) по отношению к плоскостям проекций?
3. Что называется главным меридианом поверхности? Покажите ГМ на Вашем чертеже.
4. Какие линии получаются в сечении конуса проецирующей плоскостью, если проецирующая плоскость:
 - проходит через ось конуса;
 - перпендикулярна оси;
 - параллельна одной образующей конуса;

- параллельна двум образующим конуса;
 - пересекает все образующие, но не перпендикулярна оси.
5. Какие линии получаются в сечении сферы плоскостью?
 6. Что необходимо сделать в первую очередь для построения сечения поверхности вращения плоскостью общего положения?
 7. Каким образом определяются границы видимости линии пересечения на горизонтальной и фронтальной плоскости проекций?
 8. Как расположены вспомогательные плоскости на Вашем чертеже?

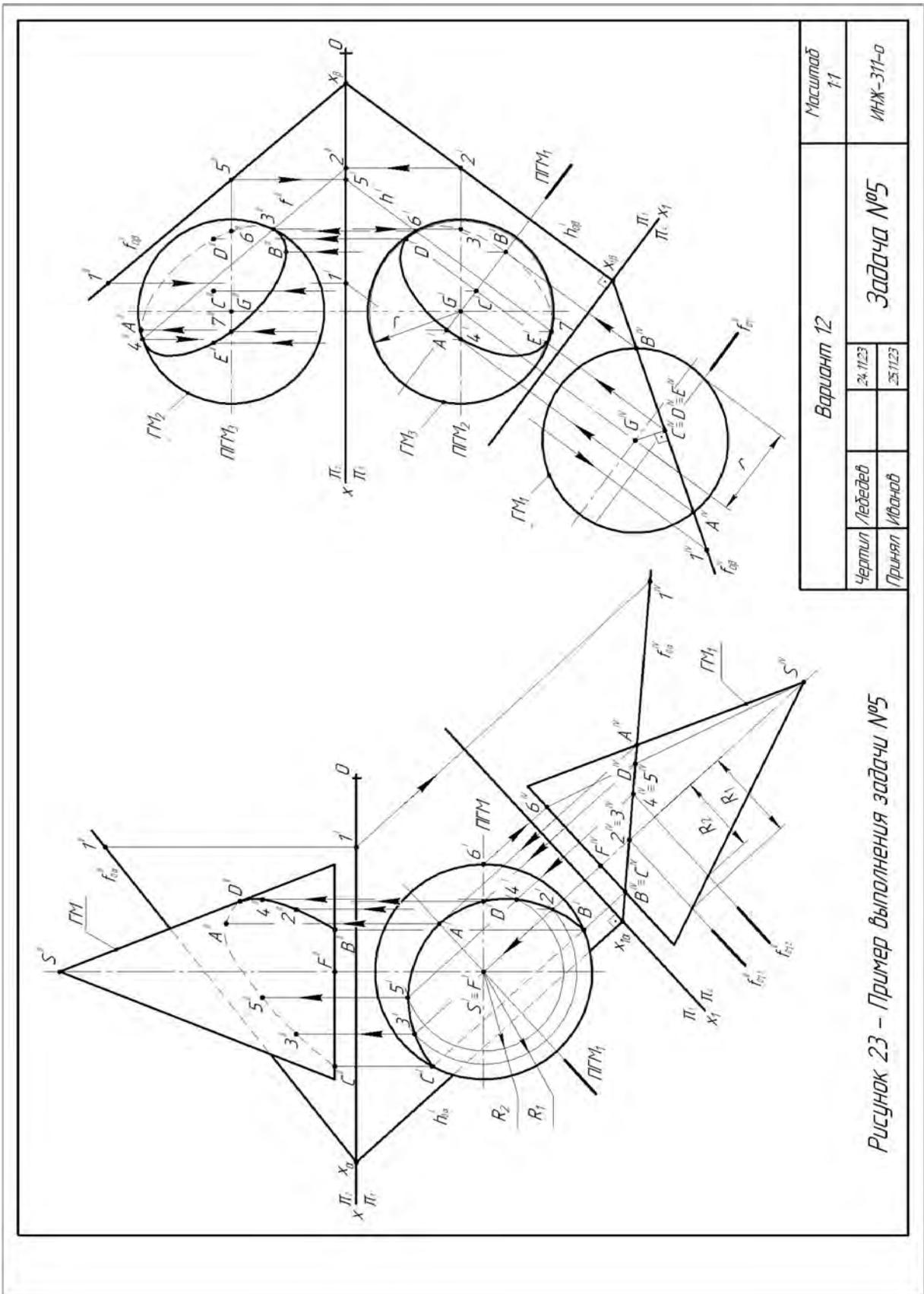


Рисунок 23 – Пример выполнения задачи №5

Вариант 12		Масштаб 1:1	
Чертил	Лебедев	24.11.23	ИЖ-311-0
Принял	Иванов	25.11.23	

ЗАДАЧА №6

Задача №6 – на построение линии пересечения поверхностей.

Задание 1. Построить линию пересечения конуса и цилиндра способом вспомогательных плоскостей (рисунок 24, а). Определить видимость линии пересечения. Центр основания конуса находится в точке F ($z_F = 0$), радиус основания R , высота конуса H . Для цилиндра задается абсцисса x_C и аппликата z_C основания цилиндра – точки C , радиус основания цилиндра r , и длина L цилиндра (основания цилиндра симметричны относительно ПГМ конуса).

Задание 2. Построить линию пересечения конуса и цилиндра способом вспомогательных сфер (рисунок 24, б). Определить видимость линии пересечения. Центр основания конуса находится в точке F ($z_F = 0$), радиус основания R , высота конуса H . Для цилиндра задается: высота оси z_C , радиус основания r и длина L цилиндра (основания цилиндра симметричны относительно оси конуса).

Данные к задаче №6 приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Данные к задаче №6 (координаты и размеры даны в мм)

Координаты	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Способ вспомогательных плоскостей (рисунок 22,а)															
x_F	80	85	80	84	70	75	75	70	75	80	80	82	80	78	70
y_F	70	70	72	72	70	70	70	72	75	75	70	72	70	70	72
R	45	42	42	45	42	45	40	45	44	42	40	42	42	45	42
H	90	95	92	92	98	95	96	100	98	95	95	96	100	98	96
x_C	50	52	55	60	52	65	70	75	50	88	85	80	80	84	75
z_C	36	30	35	32	34	36	35	40	35	36	34	40	40	40	42
r	32	30	32	32	30	32	30	32	30	32	30	35	32	34	32
L	100	90	96	96	90	96	90	96	90	96	90	100	96	98	96
Способ вспомогательных сфер (рисунок 22,б)															
x_F	80	85	85	80	80	75	75	85	80	85	85	82	80	75	75
y_F	50	55	55	60	70	65	68	72	52	60	58	62	70	62	68
R	42	45	50	48	40	52	50	45	42	46	44	48	38	52	45
H	135	142	120	132	115	128	135	122	135	140	125	132	110	134	138
z_C	72	60	75	62	75	80	82	78	70	60	72	58	72	76	78
r	34	36	40	30	38	34	35	30	32	36	40	44	38	34	35
L	130	130	130	126	130	130	128	132	130	132	130	128	130	130	128

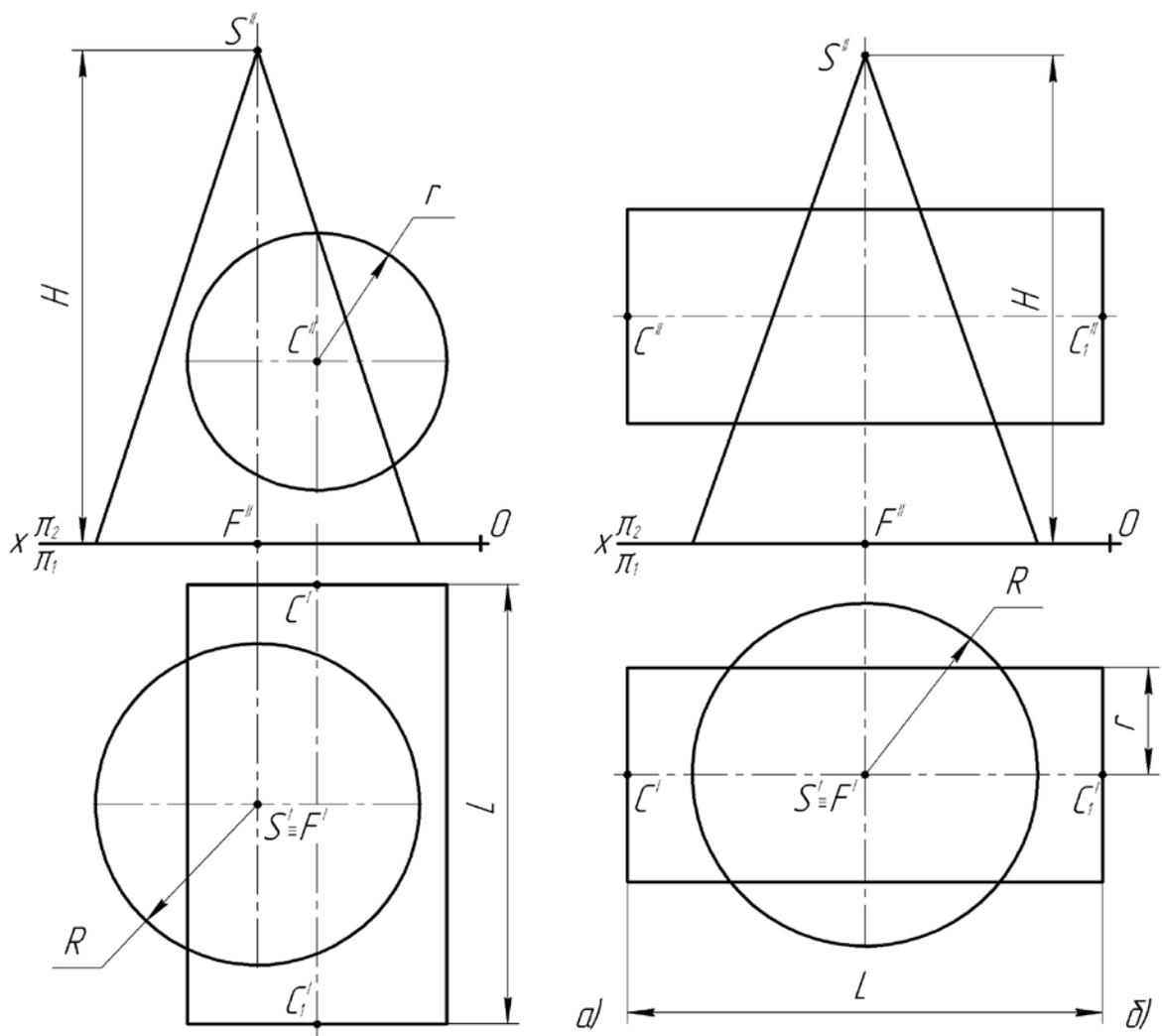


Рисунок 24 – Задание к задаче №6

Построение линии пересечения конуса и цилиндра способом вспомогательных плоскостей. Поверхность цилиндра является проецирующей (его образующие перпендикулярны фронтальной плоскости проекций), следовательно, фронтальная проекция линии пересечения известна – она совпадает с фронтальной проекцией цилиндра (рисунок 25). На пересечении фронтальной проекции цилиндра с главным меридианом конуса ($ГМ_{кон}$) находим фронтальные проекции точек A и B (A'' и B''), горизонтальные проекции этих точек определим опустив линии связи до плоскости главного меридиана конуса ($ПГМ_{кон}$).

Для построения горизонтальных проекций точек линии пересечения воспользуемся способом вспомогательных плоскостей. Например, чтобы построить горизонтальную проекцию точки 1 , принадлежащей образующей цилиндра, через нее проводим горизонтальную плоскость α_1 . Для этого через фронтальную проекцию точки ($1''$) параллельно оси x проводим фронтальный след плоскости (f_{α_1}'').

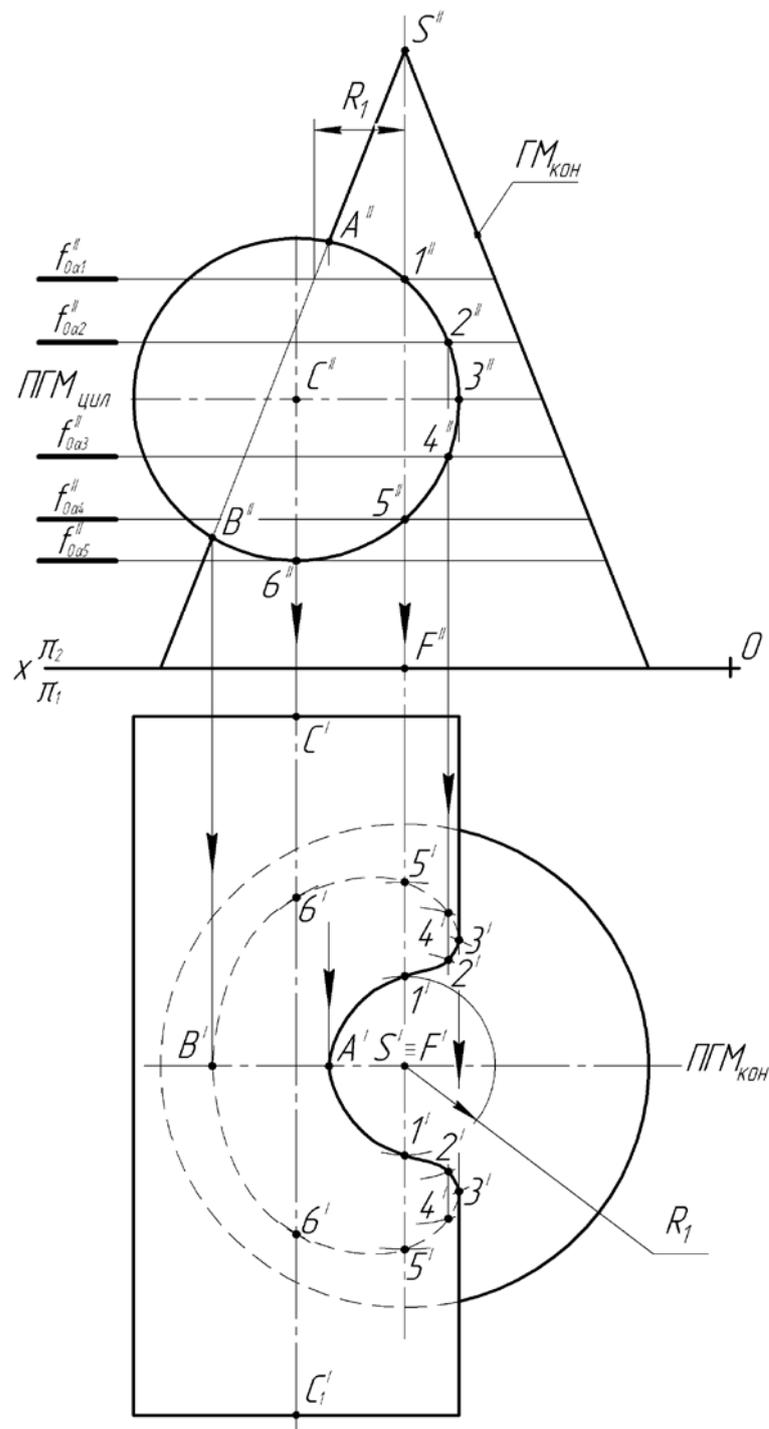


Рисунок 25 – Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных плоскостей

В сечении конуса плоскостью α_1 будет окружность радиуса R_1 . Строим окружность радиусом R_1 с центром в точке S' ; опуская линии связи точки 1 до пересечения с окружностью, найдем ее горизонтальные проекции. Таких проекций две. Так как они симметричны относительно

$\text{ПГМ}_{\text{кон}}$ и принадлежат горизонтальной проекции образующей цилиндра, то будем обозначать их одинаково – $1'$.

Таким же образом проводим плоскости $\alpha_2 - \alpha_5$. Причем плоскости α_2 и α_3 , α_1 и α_4 для упрощения построений взяли симметрично относительно $\text{ПГМ}_{\text{цил}}$. Для определения границ видимости на горизонтальной плоскости проекций (точка 3) обязательно вводим $\text{ПГМ}_{\text{цил}}$.

Далее соединяем по порядку горизонтальные проекции точек с учетом их видимости.

Построение линии пересечения конуса и цилиндра способом вспомогательных сфер. Оси конуса и цилиндра пересекаются и образуют плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций (рисунок 26). Следовательно, для построения линии пересечения можем использовать способ вспомогательных сфер. Центром вписываемых вспомогательных сфер будет точка P – точка пересечения осей конуса и цилиндра:

$$(SF) \cap (CC_1) = P \Rightarrow (S''F'') \cap (C''C_1'') = P''$$

На пересечении главных меридианов конуса и цилиндра находим характерные точки: A и B – наивысшие точки, D и E – наинизшие точки линии пересечения:

$$\text{ГМ}_{\text{кон}} \cap \text{ГМ}_{\text{цил}} = A'', B'', D'', E''$$

$$A'', B'', D'', E'' \rightarrow A', B', D', E' \subset \text{ПГМ}_{\text{кон}} (\text{ПГМ}_{\text{цил}})$$

Найдем минимальный радиус вписываемых сфер (R_{min}). Для этого из центра вписываемых сфер (P'') опустим перпендикуляры ($P''1''$) и ($P''2''$) к главным меридианам поверхностей. Наибольший из этих двух перпендикуляров – ($P''2''$) – и будет равен минимальному радиусу вписываемых сфер:

$$(P''1'') \perp \text{ГМ}_{\text{кон}}; (P''2'') \perp \text{ГМ}_{\text{цил}}$$

$$|P''2''| > |P''1''| \Rightarrow R_{\text{min}} = |P''2''|$$

Максимальный радиус вписываемых сфер (R_{max}) найдем как расстояние от центра вписываемых сфер до наиболее удаленной точки линии пересечения, т.е. это расстояние от точки P до точки D (или E):

$$|P''D''| = R_{\text{max}}$$

Проводим сферу минимального радиуса. Сфера с поверхностями конуса и цилиндра будет пересекаться по окружностям, которые в свою очередь на фронтальную плоскость проекций будут проецироваться в виде отрезков прямых. На пересечении этих отрезков получаем фронтальные проекции точек 3 и 4 ($3''$ и $4''$).

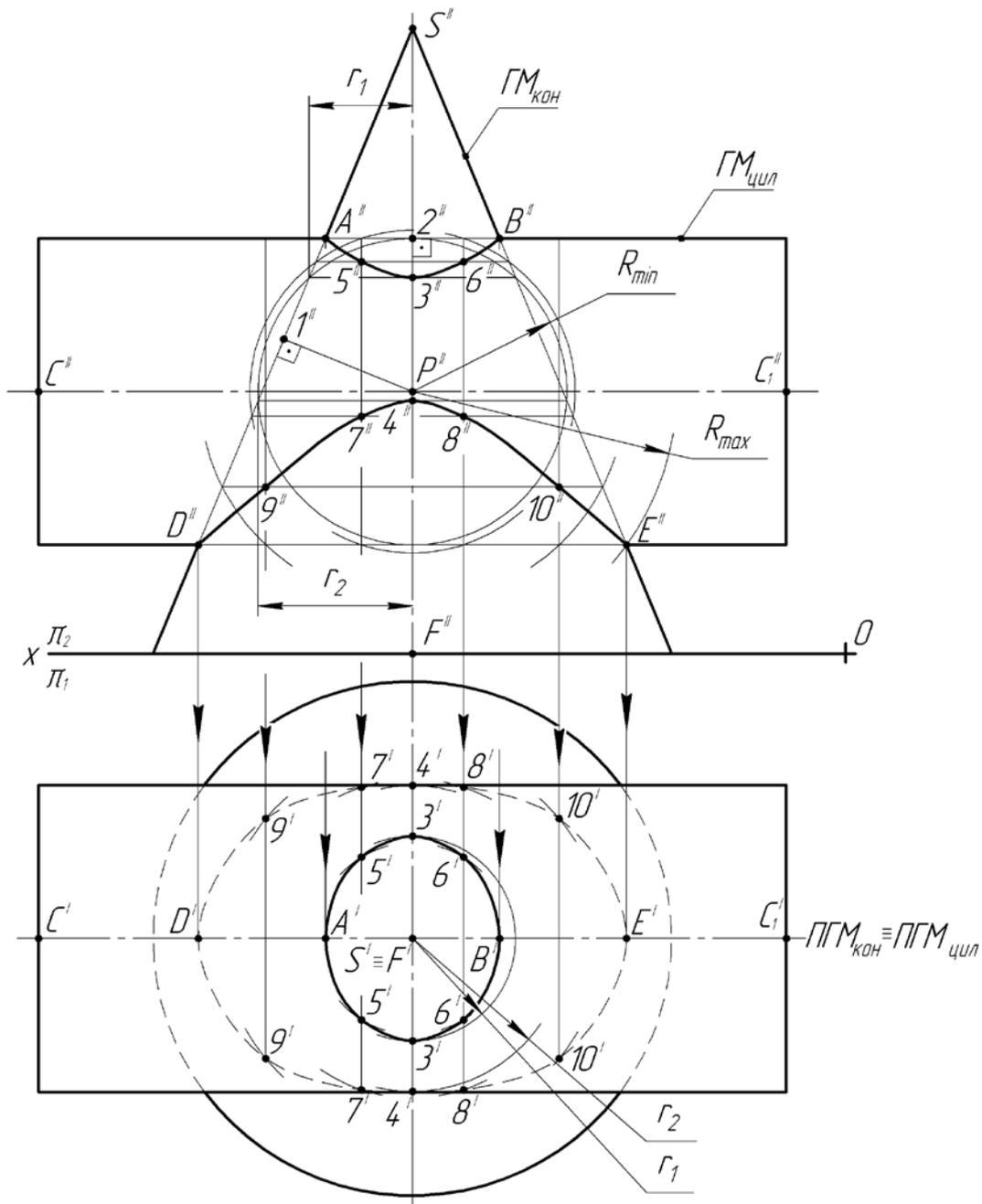


Рисунок 26 – Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных сфер

Чтобы построить горизонтальные проекции этих точек, необходимо измерить радиусы окружностей, которые получаются при пересечении сферы с конусом, – r_1 и r_2 . Горизонтальную проекцию точки 3 (3') найдем, опустив линию связи до пересечения с дугой окружности радиуса r_1 и центром в точке S' , а горизонтальную проекцию точки 4 (4') – опустив линию связи до пересечения с дугой окружности радиуса r_2 и центром в точке S' . Проекция точек, расположенные симметрично

относительно ПГМ, обозначаем одинаково. Точки 3 и 4 будут наиболее близко расположенными к оси конуса точками линии пересечения.

Далее проводим еще две сферы промежуточного радиуса R_i , большего, чем R_{min} , и меньшего, чем R_{max} . Количество сфер зависит от того, насколько точно необходимо построить линию пересечения:

$$R_{min} < R_i < R_{max}$$

С помощью сфер промежуточного радиуса получаем проекции точек 5 – 10. По порядку соединяем точки с учетом их видимости. Полученная линия пересечения будет состоять из двух частей: верхней, которая видима на горизонтальной плоскости проекций, и нижней, которая на π_1 невидима.

Примечание. Если $|P''2''| \leq |P''1''|$, то форма линии пересечения будет иной. В этом случае обязательно нужно провести через ось цилиндра горизонтальную плоскость и с ее помощью получить границы видимости линии пересечения на плоскость проекций π_1 .

Пример выполнения задачи №6 приведен на рисунке 27.

Контрольные вопросы к задаче №6

1. Какая плоскость является плоскостью главного меридиана? Покажите ПГМ на Вашем чертеже для конуса, цилиндра; как они расположены по отношению к плоскостям проекций?

2. Что называется главным меридианом поверхности? Покажите ГМ конуса и цилиндра на Вашем чертеже.

3. Какие основные способы построения линии пересечения поверхностей вращения Вы знаете?

4. В каком случае целесообразно применять способ вспомогательных плоскостей? Как применялся этот способ Вами при решении? Можно ли решить этим способом, ту задачу, которая решалась способом вспомогательных сфер?

5. В каком случае возможно применить способ вспомогательных сфер? Можно ли решить этим способом, ту задачу, которая решалась способом вспомогательных плоскостей? Почему?

6. Как определяется центр вписываемых вспомогательных сфер?

7. Какие точки линии пересечения называются характерными? Какие из этих точек и как были найдены Вами при решении задачи?

8. Как определяется минимальный радиус вписываемых сфер?

9. Как определяется максимальный радиус вписываемых сфер?

10. Как построить точки линии пересечения с помощью вспомогательной сферы?

11. Нужно ли проводить вспомогательную сферу максимального радиуса?

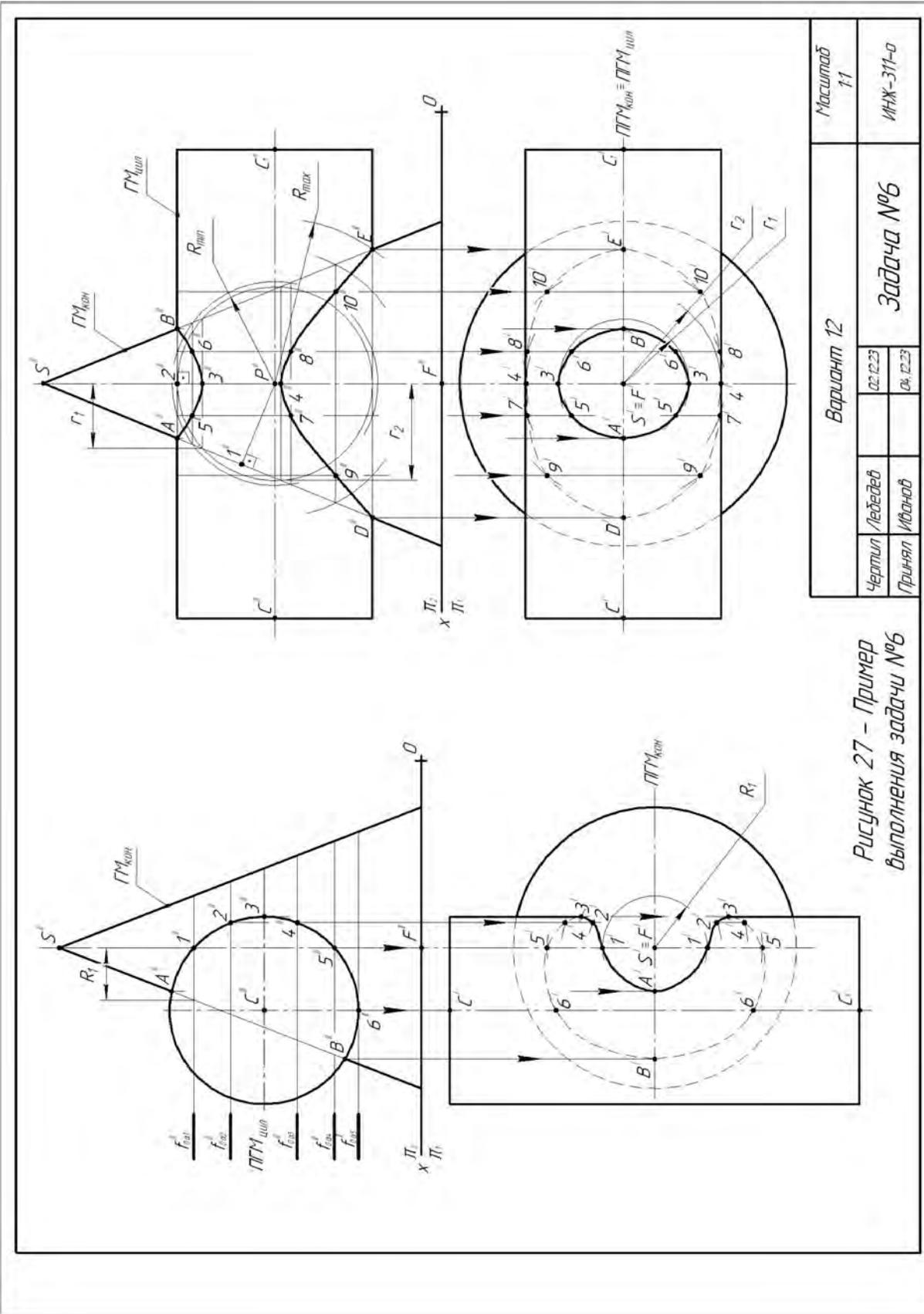


Рисунок 27 – Пример выполнения задачи №6

Вариант 12		Масштаб 1:1	
Чертил / Лебедев	02.12.23	Задача №6	
Принял / Иванов	04.12.23		
		ИНЖ-311-0	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Фролов С. А. Начертательная геометрия: учебник / С.А. Фролов. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 285 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1915469>. – Режим доступа: по подписке.
2. Фролов С. А. Начертательная геометрия: сборник задач: учебное пособие для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / С.А. Фролов. – 3-е изд., испр. – Москва: ИНФРА-М, 2022. – 172 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1834640>. – Режим доступа: по подписке.
3. Борисенко И.Г. Начертательная геометрия: учебник / И. Г. Борисенко, К. С. Рушелюк, А. К. Толстихин. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. – URL: <http://znanium.com/go.php?id=1032188>. – Режим доступа: по подписке.
4. Сальков Н. А. Начертательная геометрия: учебник / Н.А. Сальков. – Москва: ИНФРА-М, 2022. – 332 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1874094>. – Режим доступа: по подписке.
5. Сальков Н. А. Начертательная геометрия: конструирование поверхностей: учебное пособие / Н.А. Сальков. – Москва: ИНФРА-М, 2022. – 220 с. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1196545>. – Режим доступа: по подписке.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
СИМВОЛИКА НА ЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ЧЕРТЕЖЕЙ	5
ЗАДАЧА №1	7
ЗАДАЧА №2	15
ЗАДАЧА №3	24
ЗАДАЧА №4	32
ЗАДАЧА №5	39
ЗАДАЧА №6	47
СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ	54